

八十六學年度高級中學數學競賽決賽

獨立研究(第二部份)試題

6. 給定一個數列 $a_1, a_2, \dots$, 已知 $a_1 = 1, a_{2n} = 2a_n - 1, a_{2n+1} = 2a_n + 1, n = 1, 2, \dots$

(i) 當 $n = 2^{1998} - 1$ 時, 求 a_n 之值。

(ii) 試確定所有的 n 使得 $a_n = n$

7. 設 Γ 表座標平面上的一個圓錐曲線, 點 P 之座標為 $(2, 2)$, 點 A 的座標為 (x_1, y_1) , 點 B 的座標為 $(1 + x_1/2, 2)$, 其中 $x_1 > 2, y_1 > 2$ 。若已知

(i) Γ 的圖形對稱於直線 $x = 2$, 而且通過 P, A 兩點。

(ii) A, B 所決定的直線是 Γ 在點 A 的切線。

試問 Γ 是何種圓錐曲線? 理由為何?

8. 設 $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ 為非負實數 ($n > 1$), 而且 $x_1 = 1, x_{k+1} \leq 3x_k, k = 1, 2, \dots$, 求

$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + (-1)^{k+1} x_k + \dots - x_{2n}$ 之最大值。

9. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是非負的實數, 且

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{a_1 a_2^2} + \sqrt[3]{a_2 a_3^2} + \dots + \sqrt[3]{a_{n-1} a_n^2} + \sqrt[3]{a_n a_1^2} \\ y &= \sqrt[3]{a_1^2 a_2} + \sqrt[3]{a_2^2 a_3} + \dots + \sqrt[3]{a_{n-1}^2 a_n} + \sqrt[3]{a_n^2 a_1} \end{aligned}$$

試證明 x, y 中至多只有一數超過 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$

10. A 棟大廈內有 70 人, 每個人年齡都不超過 60 歲, B 棟大廈內有 60 人, 每個人年齡都不超過 70 歲, 試證明 A 棟大廈內有某些人的年齡的總和與 B 棟大廈內某些人年齡的總和是相等的。