

八十六學年度高級中學數學競賽決賽

獨立研究(第一部份)參考解答

參考解答

1、本問題有多種證法，在此採複數解法，設 M 為原點

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow -b \text{ (複數)}$$

$$C \rightarrow b$$

$$\text{則 } Q \text{ 點坐標為 } b + (a-b) \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= b + (a-b) \cdot \frac{1-i}{2}$$

$$P \text{ 點坐標為 } b + (a-(-b)) \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -b + (a+b) \cdot \frac{1+i}{2}$$

$$\text{因為 } \left[b + (a-b) \cdot \frac{1-i}{2} \right] \cdot i = -b + (a+b) \cdot \frac{1+i}{2}$$

所以 $\overline{MQ} \perp \overline{MP}$ 且 $MQ = MP$

所以 MPQ 為等腰直角三角形，且 M 為直角。

$$\begin{aligned} 2、\text{證明：} & 2(a^4 + a^2b^2 + b^4) - 3(a^3b + ab^3) \\ &= a^4 + b^4 + (a^2 + b^2)^2 - 3(a^2 + b^2)ab \\ &= a^4 + b^4 + (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 2ab) - (a^2 + b^2)ab \\ &= (a^3 - b^3)(a-b) + (a^2 + b^2)(a-b)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

“=”成立 $\Leftrightarrow a = b$

3、假設歐基里得造的多項式為 $f(x)$ 及那時的年紀為 a 歲，並設旁邊的人所代入較大的數為 L 。根據題意我們有

$$\begin{cases} f(7) = 77 \\ f(L) = 85 \\ f(a) = 0 \\ 7 < L < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-7) \mid 77 \\ (a-L) \mid 85 \\ (a-L) \mid 8 = 85 - 77 \\ 7 < L < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 8, 14, 18, 84 \\ L = 8, 9, 11, 15 \\ (a-L) \mid 8 \\ 7 < L < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 14 \\ L = 9 \end{cases}$$

因此當歐基里得的年紀為 14 歲，所以他出生於西元 350 年。

4、證明：令 $q = \alpha + \beta \in \mathcal{Q}$ ，則

$$f(\alpha) = 0 = g(\beta) = g(q - \alpha).$$

故 α 為 $f(x) = 0$ 與 $g(q - x) = 0$ 的一共同根。因為 $f(x), g(q - x)$ 都是 $\mathcal{Q}[x]$ 中的實多項式，故存在 $-t \in \mathcal{Q}$ 使得 $f(x) = t \cdot g(q - x)$ 。以 $x = \beta$ 代入，得 $f(\beta) = t \cdot g(q - \beta) = t \cdot g(\alpha)$ 。

(i) 若 $g(\alpha) = 0$ ，則 $f(\beta) = 0$ ，得 $g(\alpha)f(x) - f(\beta)g(x) = 0$ 為一恆等式，故命題成立。

(ii) 若 $g(\alpha) \neq 0$ ，則 $t = \frac{f(\beta)}{g(\alpha)}$ ，得 $g(\alpha)f(x) - f(\beta)g(q - x) = 0$ 。以

$x = \frac{q}{2}$ 代入，得

$$g(\alpha)f\left(\frac{q}{2}\right) - f(\beta)g\left(\frac{q}{2}\right) = 0.$$

故 $x = \frac{q}{2}$ 為方程式 $g(\alpha)f(x) - f(\beta)g(x) = 0$ 的一有理根。

5、因該無窮數列中至少有一項不為 0，可推知連續 7 項中至多只能有 4 項是 0。以下是一種滿足這種狀況的數列

$$\cdots 0, 0, 0, 0, 1, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 3, \cdots$$

因 $1998 = 7 \cdot 285 + 3$ ，故所求至多共有 $4 \cdot 285 + 3 = 665$ 個 0。