

八十六學年度高級中學數學競賽決賽

獨立研究(第一部份)試題

1. 在三角形 ABC 上，分別以線段 AB 及線段 AC 為長度向外側作正方形。設 P, Q 分別為這兩個正方形的中心，M 是線段 BC 的中點，試判別三角形 MPQ 是何種三角形。

2. 設 a, b 為實數，證明
$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}$$

3. 歷史學家為了推敲大數學家歐基里得的出生年份，發現在西元前 336 年時，流傳著一則很有趣的故事：那年的某一天，歐基里得造了一個整係數多項式，並興高采烈的跟旁邊的人說“我現在的年紀剛好是這個多項式的一個根”。旁邊的人為了想知道歐基里得的歲數，於是將 7 及一個比 7 大的整數代入歐基里得的多項式（想碰運氣，看是否能找到那個根，推得歐基里得的歲數），結果分別得到 77 與 85 的值。這時歐基里得笑著說“我的年紀有你代的數那麼小嗎？”。你能根據這些對話推得歐基里得出生的年份嗎？

4. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為兩個有理係數多項式且都是質式，若 $f(x)=0$ 有一根 α 且 $g(x)=0$ 有一根 β 使得 $\alpha + \beta$ 是有理數，試證方程式 $g(\alpha)f(x) - f(\beta)g(x) = 0$ 有一有理根。

5. 已知不全為 0 的無窮數列 $\cdots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ 滿足

(i) 每一項 $a_n = 0$ 或 1 或 3

(ii) 若 $a_n = 0$ 則 $a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + a_{n-6}$ 為 5 的倍數，試問

在這 $a_1, a_2, \cdots, a_{1998}$ 的項中最多有幾項是 0？