教育部 104 學年度高級中學數學能力競賽決賽
參考解答

【筆試一】第一題

設 a,b,c 為正數且滿足 $abc=1$。試求 $\dfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{a^4+b^4+c^4}$ 的最大值。

【解】 最大值是 3，且在 $a=b=c=1$ 時可達到。以下證明：

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\le 3(a^4+b^4+c^4) \text{ 。} \qquad (1)$$

由算幾不等式可得：

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3 \text{ 。}$$

若證得以下(2)式，則(1)式自然會成立：

$$(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)\le 9(a^4+b^4+c^4) \text{ 。} \qquad (2)$$

事實上，由柯西不等式：

$$(1^2+1^2+1^2)(a^4+b^4+c^4)\ge(a^2+b^2+c^2)^2 \text{ ，}$$

$$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2 \text{ 。}$$

兩式相乘即得(2)式。

【筆試一】第二題

設數列$\{\, a_n \,\}_{n=1}^{\infty}$定義如下：$a_1 = 5$、$a_2 = 5$，且對每個正整數$n$，恆有$a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{98}$。

試證：對每一個正整數n，$\dfrac{a_n + 1}{6}$都是完全平方數。

【解】對每個$n \in \boldsymbol{N}$，令$b_n = (a_n + 1)/6$或改寫成$a_n = 6b_n - 1$。顯然地，$b_1 = 1$及$b_2 = 1$，它們都是完全平方數。對每個$n \in \boldsymbol{N}$，因為$a_{n+2} = 98a_{n+1} - a_n$，可得

$$b_{n+2} = 98b_{n+1} - b_n - 16\text{。}$$

由此可得：$b_1 = 1$，$b_2 = 1$，$b_3 = 81$，$b_4 = 7921$，$b_5 = 776161$，$b_6 = 76055841$；以及$\sqrt{b_1} = 1$，$\sqrt{b_2} = 1$，$\sqrt{b_3} = 9$，$\sqrt{b_4} = 89$，$\sqrt{b_5} = 881$，$\sqrt{b_6} = 8721$。觀察這六項可知它們滿足遞迴關係式：$\sqrt{b_{n+2}} = 10\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{b_n}$。

設數列$\{\, c_n \,\}_{n=1}^{\infty}$定義如下：$c_1 = 1$、$c_2 = 1$，且$c_{n+2} = 10c_{n+1} - c_n$，$n \in \boldsymbol{N}$。則此數列的每一項都是正整數。下面我們以數學歸納法證明：

$$\text{對每個 } n \in \boldsymbol{N}\text{，恆有 } b_n = c_n^2\text{。}$$

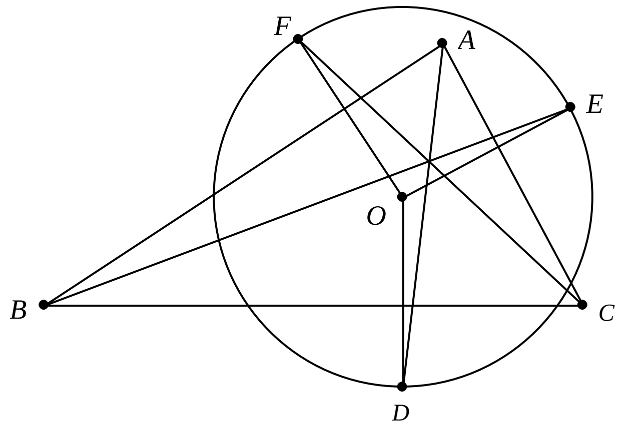
顯然地，$b_1 = c_1^2$，$b_2 = c_2^2$，$b_3 = c_3^2$。

設$k \in \boldsymbol{N}$且$b_k = c_k^2$、$b_{k+1} = c_{k+1}^2$、$b_{k+2} = c_{k+2}^2$。因為$b_{k+2} = 98b_{k+1} - b_k - 16$且$b_{k+3} = 98b_{k+2} - b_{k+1} - 16$，所以，將兩式相減，即得$b_{k+3} = 99b_{k+2} - 99b_{k+1} + b_k$。將假設的三等式代入，可得

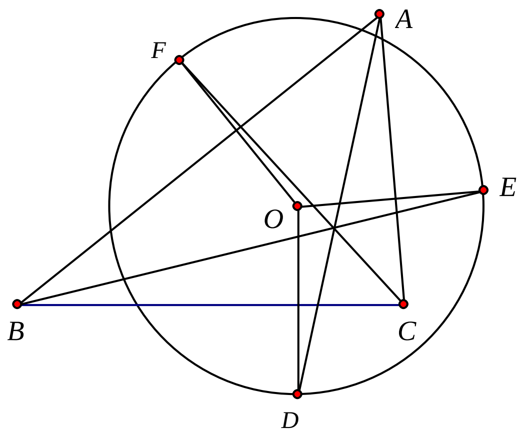
$$\begin{aligned} b_{k+3} &= 99c_{k+2}^2 - 99c_{k+1}^2 + c_k^2 = 99c_{k+2}^2 - 99c_{k+1}^2 + (10c_{k+1} - c_{k+2})^2 \\ &= 100c_{k+2}^2 - 20c_{k+2}c_{k+1} + c_{k+1}^2 = (10c_{k+2} - c_{k+1})^2 \\ &= c_{k+3}^2\text{。} \end{aligned}$$

【筆試一】第三題

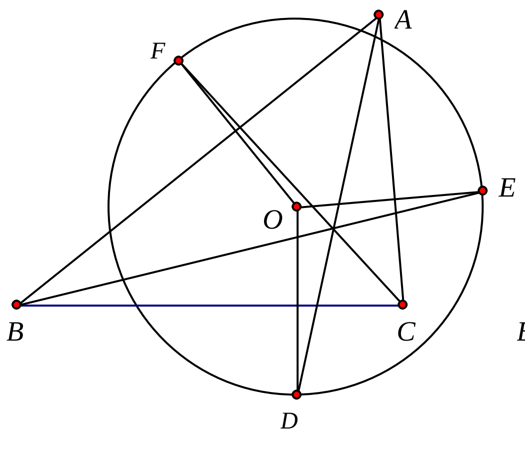
設點 O 是銳角三角形 ABC 的內心，圓 $O(t)$ 是以 O 為圓心、正數 t 為半徑的圓，以 O 為端點分別作三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 的垂直射線。若三垂直射線與圓 $O(t)$ 分別交於點 D、E、F，試證：直線 AD、BE 與 CF 共點。

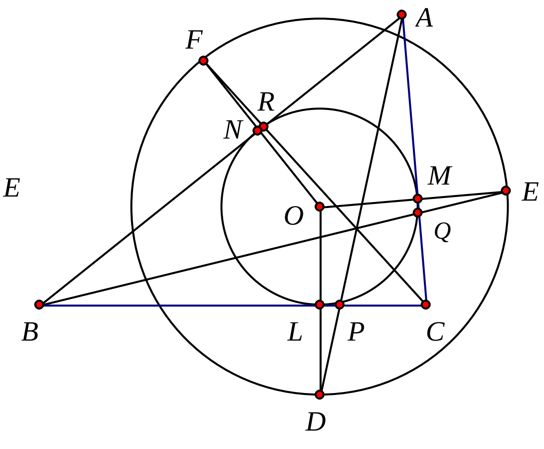


【解】



證 1：





設$\triangle ABC$ 的內切圓與三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{CA}$ 分別相切於點 L、M、N，又設直線 AD

與直線 BC 相交於點 P、直線 BE 與直線 CA 相交於點 Q、直線 CF 與直線 AB 相交於點 R。因為$\triangle ABC$ 是銳角三角形，所以，點 P 在 $\overline{BC}$ 上、點 Q 在 $\overline{CA}$ 上、點 R 在 $\overline{AB}$ 上。(當 $\angle C$ 是鈍角且 t 值很大時， P 是 $\overline{BC}$ 的外分點、Q 是 $\overline{CA}$ 的外分點。)

因為 $\overline{AM}=\overline{AN}$ 、 $\overline{EM}=\overline{FN}$ 且 $\angle AME=\angle ANF=90^\circ$，所以 $\triangle AEM\cong\triangle AFN$。於是，得 $\overline{AE}=\overline{AF}$ 且 $\angle EAM=\angle FAN$ 。進一步地得： $\angle BAE=\angle CAF$ 。同理，因為 $\overline{BN}=\overline{BL}$、$\overline{FN}=\overline{DL}$ 且 $\angle BNF=\angle BLD=90^\circ$，所以 $\triangle BFN\cong\triangle BDL$。於是，得 $\overline{BF}=\overline{BD}$ 且 $\angle FBN=\angle DBL$ 。進一步地得： $\angle CBF=\angle ABD$ 。同理，因為 $\overline{CL}=\overline{CM}$ 、 $\overline{DL}=\overline{EM}$ 且 $\angle CLD=\angle CME=90^\circ$，所以 $\triangle CDL\cong\triangle CEM$。於是，得 $\overline{CD}=\overline{CE}$ 且 $\angle DCL=\angle ECM$ 。進一步地得： $\angle ACD=\angle BCE$ 。

其次，考慮兩同底三角形的面積比，可得

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}=\frac{\Delta ABD\text{的面積}}{\Delta ACD\text{的面積}}=\frac{\overline{AB}\times\overline{BD}\sin\angle ABD}{\overline{AC}\times\overline{CD}\sin\angle ACD}\ ,$$

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}=\frac{\Delta BCE\text{的面積}}{\Delta BAE\text{的面積}}=\frac{\overline{BC}\times\overline{CE}\sin\angle BCE}{\overline{AB}\times\overline{AE}\sin\angle BAE}\ ,$$

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}=\frac{\Delta CAF\text{的面積}}{\Delta CBF\text{的面積}}=\frac{\overline{AC}\times\overline{AF}\sin\angle CAF}{\overline{BC}\times\overline{BF}\sin\angle CBF}\ 。$$

將三式相乘，即得

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\times\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\times\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}$$

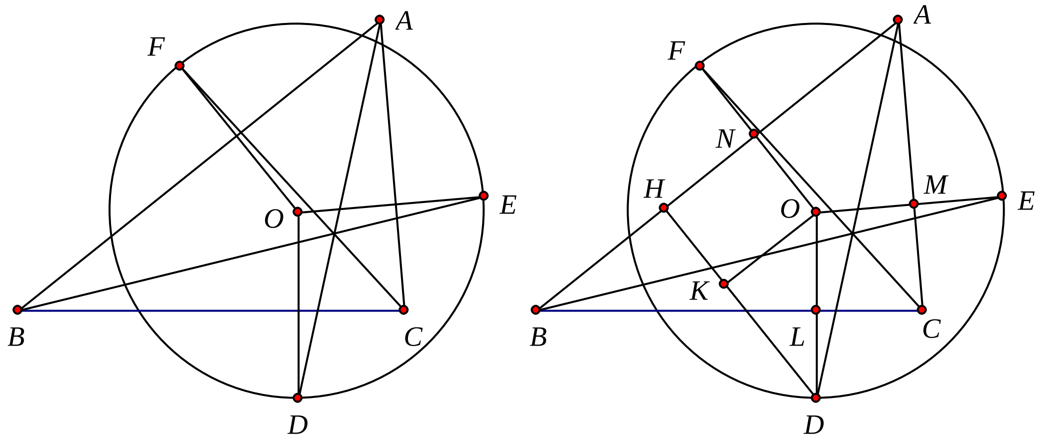
$$=\frac{\overline{AB}\times\overline{BD}\sin\angle ABD}{\overline{AC}\times\overline{CD}\sin\angle ACD}\times\frac{\overline{BC}\times\overline{CE}\sin\angle BCE}{\overline{AB}\times\overline{AE}\sin\angle BAE}\times\frac{\overline{AC}\times\overline{AF}\sin\angle CAF}{\overline{BC}\times\overline{BF}\sin\angle CBF}$$

$$=\frac{\overline{BD}\sin\angle ABD}{\overline{CD}\sin\angle ACD}\times\frac{\overline{CE}\sin\angle BCE}{\overline{AE}\sin\angle BAE}\times\frac{\overline{AF}\sin\angle CAF}{\overline{BF}\sin\angle CBF}\ 。$$

因為 $\angle BAE=\angle CAF$ 、 $\angle CBF=\angle ABD$ 、 $\angle ACD=\angle BCE$ ，所以，可得

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\times\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}\times\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=1\ 。$$

因為直線 AP、BQ 與 CR 不會兩兩平行，所以，依 Ceva 定理，可知直線 AP、BQ 與 CR 共點，亦即：直線 AD、BE 與 CF 共點。



證 2：設 ΔABC 的內切圓半徑為 r。

因為 ΔABC 是銳角三角形，所以，點 D 在 $\angle A$ 的內部、點 E 在 $\angle B$ 的內部、點 F 在 $\angle C$ 的內部。

令 $d(A,BC)$ 表示點 A 至直線 BC 的距離。若點 D 至直線 AB 的垂足為 H，點 O 至直線 DH 的垂足為 K，則可得

$$d(D,AB)=\overline{DH}=\overline{DK}+\overline{KH}=\overline{OD}\cos\angle ODK+\overline{ON}=t\cos\angle B+r \text{ 。}$$

仿此可得下述等式：

$$d(D,AB)=r+t\cos\angle B \text{，} \quad d(D,AC)=r+t\cos\angle C \text{，}$$

$$d(E,BC)=r+t\cos\angle C \text{，} \quad d(E,BA)=r+t\cos\angle A \text{，}$$

$$d(F,CA)=r+t\cos\angle A \text{，} \quad d(F,CB)=r+t\cos\angle B \text{ 。}$$

設直線 AD 與直線 BE 交於 G，則依相似三角形的邊長成比例，可得

$$\frac{d(G,AB)}{d(G,AC)}=\frac{d(D,AB)}{d(D,AC)}=\frac{r+t\cos\angle B}{r+t\cos\angle C} \text{，}$$

$$\frac{d(G,AB)}{d(G,BC)}=\frac{d(E,AB)}{d(E,BC)}=\frac{r+t\cos\angle A}{r+t\cos\angle C} \text{ 。}$$

將兩式相除，即得

$$\frac{d(G,AC)}{d(G,BC)}=\frac{r+t\cos\angle A}{r+t\cos\angle B}=\frac{d(F,AC)}{d(F,BC)} \text{ 。}$$

因為 $d(G,AC):d(G,BC)=d(F,AC):d(F,BC)$，所以可知點 C、F 與 G 共線，亦即：直線 AD、BE 與 CF 共點。 ‖