# 101 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

## 筆試試題（一）【參考解答】

一、【解】利用柯西不等式，可得

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_7^2)(1+2+\cdots+7)\ge\left(a_1+\sqrt{2}a_2+\cdots+\sqrt{7}a_7\right)^2\ge 14^2=196$，

即 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_7^2\ge 7$ 。

欲證 $\max\left|a_i-a_j\right|\ge\sqrt{2}$ ，即證明 $C_2^7\cdot\max(a_i-a_j)^2\ge 7(7-1)$ ；又

$$C_2^7\cdot\max(a_i-a_j)^2\ge\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2,$$

因此，僅須證明：$\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2\ge 7(7-1)$ 。

利用 $\sum_{i<j}(a_i^2+a_j^2)=6\sum_{k=1}^{7}a_k^2$ (每一項 $a_k^2$ 都恰好出現 6 次)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2&=\sum_{i<j}(a_i^2+a_j^2)-2\sum_{i<j}a_ia_j\\&=6\sum_{k=1}^{7}a_k^2-\left((\sum_{k=1}^{7}a_k)^2-\sum_{k=1}^{7}a_k^2\right)\\&=7\sum_{k=1}^{7}a_k^2-(\sum_{k=1}^{7}a_k)^2\\&\ge 7^2-(\sqrt{7})^2=7(7-1)\text{ 。}\end{aligned}$$

二、【解】

根據 $\cos^3\theta=\frac{1}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta)$，得知 $\alpha=2\cos 20^\circ,\beta=-2\cos 40^\circ,$

$\gamma=-2\cos 80^\circ$ 是方程式

$$x^3-3x-1=0$$

的三根，令以 $\alpha^{\frac{1}{3}},\beta^{\frac{1}{3}},\gamma^{\frac{1}{3}}$ 為三根的方程式為

$$z^3-az^2+bz-1=0.$$

將 $z^3-1=az^2-bz$ 兩邊立方得到

$$(z^3-1)^3-a^3z^6+b^3z^3+3abz^3(z^3-1)=0.$$

若將 $z^3$ 看成 $x$ ，則上述方程式與 $x^3-3x-1=0$ 有相同的根，並比較這兩個方程式的係數得到 $0=a^3+3-3ab,\ \ -3=b^3+3-3ab.$

設 $t$ 為 $a^3=6+3t,\ \alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=a=(6+3t)^{\frac{1}{3}}$ 而且

$b^3=-6+3ab=-3+a^3=-3+(6+3t)=3+3t,3+t=ab.$

得到

$$(3+t)^3=a^3b^3=(6+3t)(3+3t),$$

解得 $t=-\sqrt[3]{9}$ 。將 $t=-\sqrt[3]{9}$ 代入

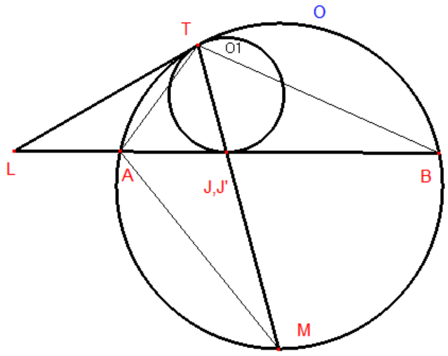
$$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}+\gamma^{\frac{1}{3}}=a=(6+3t)^{\frac{1}{3}}$$

得到

$(2\cos 20^\circ)^{\frac{1}{3}}+(-2\cos 40^\circ)^{\frac{1}{3}}+(-2\cos 80^\circ)^{\frac{1}{3}}=(6-3\sqrt[3]{9})^{\frac{1}{3}}.$

整理之後，得到所要證的式子。

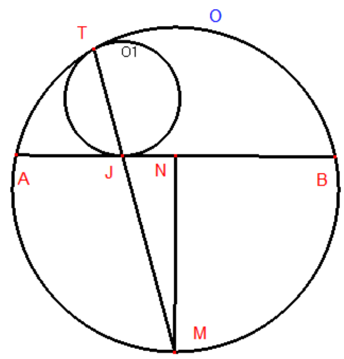
三、【證明】




令 $M$ 為 $AB$ 的中點，且 $M$ 與 $O_1, O_2$ 不在同一邊。設圓 $O_1$ 與 $AB$ 切於 $J$ ，與圓 $O$ 切於 $T$；過 $T$ 對圓 $O$ 的切線交 $AB$ 的延線於 $L$ ；$MT$ 交 $AB$於 $J'$。

(1) $J=J'$ 即 $M\ J\ T$ 共線：因 $LT$ 為對圓 $O_1$ 的切線，只須證 $\angle LTJ'=\angle LJ'T$ 。

$$\begin{aligned}\angle LJ'T &= \angle J'TB+\angle TBJ' \\ &= \angle ATJ'+\angle TBJ' \quad (\because M\text{為}AB\text{ 中點}) \\ &= \angle ATJ'+\angle TMA \\ &= \angle ATJ'+\angle LTA \quad (\because LM\text{為切線}) \\ &= \angle LTJ'\end{aligned}$$

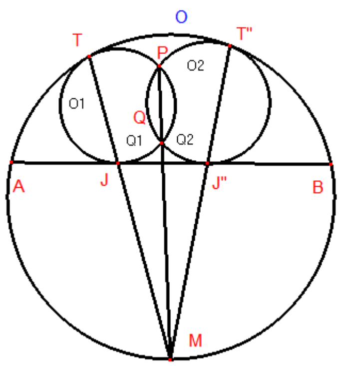



(2) $\overline{MJ}\cdot\overline{MT}=\overline{MN}^2+\frac{1}{4}\overline{AB}^2$ ：作 M 至 AB 的垂線，垂足為 $N$ ，則

$$\begin{aligned}\overline{MJ}\cdot\overline{MT} &= \overline{MJ}\cdot(\overline{MJ}+\overline{JT})=\overline{MJ}^2+\overline{MJ}\cdot\overline{JT} \\ &= \overline{MN}^2+\overline{JN}^2+\overline{AJ}\cdot\overline{JB} \\ &= \overline{MN}^2+\overline{JN}^2+(\frac{1}{2}\overline{AB}-\overline{JN})(\frac{1}{2}\overline{AB}+\overline{JN}) \\ &= \overline{MN}^2+\frac{1}{4}\overline{AB}^2\end{aligned}$$

(3) 設 $O_2$ 與 $\overline{AB}$, 圓 $O$ 分別切於 $J'',T''$， $\overline{MP}$ 分別交圓 $O_1, O_2$ 於第二點 $Q_1, Q_2$ ，則

$\overline{MJ}\cdot\overline{MT}=\overline{MP}\cdot\overline{MQ_1}$ , $\overline{MJ''}\cdot\overline{MT''}=\overline{MP}\cdot\overline{MQ_2}$ 。




由 (2) 知

$$\begin{aligned}&\overline{MP}\cdot\overline{MQ_1}=\overline{MJ}\cdot\overline{MT}=\overline{MN}^2+\frac{1}{4}\overline{AB}^2 \text{ 。} \\ &=\overline{MJ''}\cdot\overline{MT''}=\overline{MP}\cdot\overline{MQ_2}\end{aligned}$$

故 $Q_1=Q_2=Q$ 。證畢。