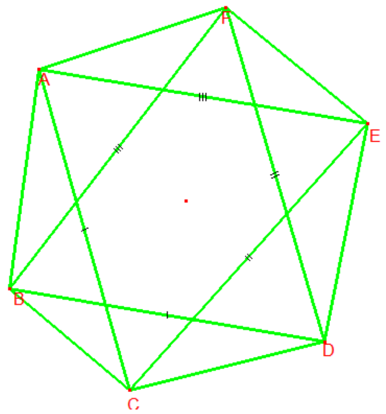
# 101 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

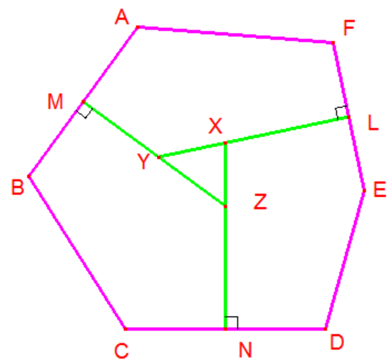
## 口試試題【參考解答】

一、【證】




因 $\overline{AB}=\overline{DC},\ \ \overline{CA}=\overline{BD},\ \ \overline{BC}=\overline{CB},$，得
$\Delta ABC\cong\Delta DCB$，故 $\angle BAC=\angle BDC$。由此知
$A, B, C, D$ 共圓，記為圓 $O_1$。同理 $C, D, E, F$ 及
$E, F, A, B$ 分別共於圓 $O_2, O_3$。

若 $O_1, O_2, O_3$ 為三個相異圓，倆倆的根軸為 $AB, CD, EF$，
三根軸共點，與 $ABCDEF$ 為凸六邊形矛盾。若其中兩個相同，如 $O_1=O_2$，則六點都在此圓上。這部分可另證如下：
如圖，作 $\overline{AB},\ \ \overline{CD},\ \ \overline{EF}$ 的垂直平分線 $MYZ, NZX, LXY,$
倆倆交點為 $X, Y, Z$。$Z, X, Y,$ 分別為圓 $O_1, O_2, O_3$ 的圓心，
因為 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}$ 故




$$\overline{NZ}+\overline{ZX}=\overline{LX},$$
$$\overline{LX}+\overline{XY}=\overline{MY},$$
$$\overline{MY}+\overline{YZ}=\overline{ZN}.$$

取三式和得 $\overline{XY}+\overline{YZ}+\overline{ZX}=0,$
故 $\overline{XY}=\overline{YZ}=\overline{ZX}=0,$
因此 $X=Y=Z,\ O_1=O_2=O_3$。證畢。

二、【證】

由已知，任何正整數 $n$ 可表示成
$n=a^2+b^2+c^2+d^2,$ 其中 $a\ge b\ge c\ge d\ge 0.$
接下來，觀察可得：
若 $a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,8),$ 則 $a, b, c, d$ 皆為偶數。
因此，若 $8n=a^2+b^2+c^2+d^2,$ 則
$2n=(a/2)^2+(b/2)^2+(c/2)^2+(d/2)^2.$
反之，若 $2n=a^2+b^2+c^2+d^2,$ 則 $8n=(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2+(2d)^2.$
因此，$2n$ 表示成四個平方和的方式與 $8n$(的表現方式)有一一對應關係。

現在，因為 2 的表現方式只有一種，也就是 $2=1^2+1^2+0^2+0^2,$
所以，8 的表現方式也只有一種，也就是 $8=2^2+2^2+0^2+0^2,$
同樣地，32 的表現方式也只有一種，也就是 $32=4^2+4^2+0^2+0^2,$
依此類推，$2^{2r+1}$ 的表現方式只有一種，也就是 $2^{2r+1}=(2^r)^2+(2^r)^2+0^2+0^2.$
故，$2^{2r+1}, r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$ 都無法寫成四個正整數的平方和，得證。