100學年度高級中學數學能力競賽決賽
筆試試題（一）參考解答

注意事項：

（1）時間：2 小時（13:30～15:30）
（2）配分：每題皆為 35 分
（3）不可使用計算器
（4）請將答案依序寫在答案卷內

一、試求所有使得$(x+\dfrac{1}{y}, y+\dfrac{1}{z}, z+\dfrac{1}{x})$為正整數序對的正有理數序對$(x, y, z)$.

【參考解答】：設$x+\dfrac{1}{y}=a$，$y+\dfrac{1}{z}=b$，$z+\dfrac{1}{x}=c$，其中a, b, c為正整數，則

$y=\dfrac{1}{a-x}$，$z=\dfrac{1}{b-y}=\dfrac{a-x}{ab-1-bx}$．將此代入$z+\dfrac{1}{x}=c$可得$\dfrac{a-x}{ab-1-bx}+\dfrac{1}{x}=c$．此式等價於

$$(bc-1)x^2+(a-b+c-abc)x+ab-1=0 \qquad (1)$$

若$bc=1$，則$b=c=1$，因而$a=1$．此時$(x, y, z)=(\dfrac{y-1}{y}, y, \dfrac{-1}{y-1})$，其中 y 可為任意的正有理數，這顯然不可能（因為x, y, z必須都為正有理數）．同理，$ab=1$，$ac=1$也不可能．

因此僅需考慮$bc>1$，此時(1)式的判別式為

$$\Delta=(a-b+c-abc)^2-4(bc-1)(ab-1)=(abc-a-b-c)^2-4 \qquad (2)$$

因為x為正有理數，所以Δ為完全平方數，因而$abc-a-b-c=\pm 2$．

又$abc-a-b-c=a(bc-1)-b-c\ge bc-1-b-c=(b-1)(c-1)-2\ge -2$，

上式等號成立若且唯若所有的等號均成立，因而會導致$ab=1$，或$bc=1$，或$ac=1$，此與前所得的結論矛盾，故，

$$abc-a-b-c=2. \qquad (3)$$

若$a, b, c\ge 3$，則(3)不可能成立，所以至少有一個數為 1 或 2.

如果$a=1$，則$(b-1)(c-1)=4$，因而$\{b, c\}=\{3, 3\}$或$\{b, c\}=\{2, 5\}$．此時有

$a=1$，$b=2$，$c=5$ $\Rightarrow$ $(x, y, z)=(\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{2}, 2)$（此有 3 種輪換形式）;

$a=1$，$b=3$，$c=3$ $\Rightarrow$ $(x, y, z)=(\dfrac{1}{2}, 2, 1)$（此有 3 種輪換形式）;

$a=1$，$b=5$，$c=2$ $\Rightarrow$ $(x, y, z)=(\dfrac{2}{3}, 3, \dfrac{1}{2})$（此有 3 種輪換形式）.

如果$a=2$，則$(2b-1)(2c-1)=9$，因而$\{b, c\}=\{2, 2\}$或$\{b, c\}=\{1, 5\}$．此時有

$a=2,\ b=1,\ c=5 \ \Rightarrow\ (x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{2}{3},3)$;(此為第 3 組解的輪換形式之一)

$a=2,\ b=5,\ c=1 \ \Rightarrow\ (x,y,z)=(\frac{3}{2},2,\frac{1}{3})$;(此為第 1 組解的輪換形式之一)

$a=2,\ b=2,\ c=2 \ \Rightarrow\ (x,y,z)=(1,1,1)$.

由於 x, y, z 的順序是輪換的，所以輪換 x, y, z 的順序亦為其解，亦即$(\frac{1}{3},\frac{3}{2},2)$，$(\frac{3}{2},2,\frac{1}{3})$，$(2,\frac{1}{3},\frac{3}{2})$；$(\frac{1}{2},2,1)$，$(2,1,\frac{1}{2})$，$(1,\frac{1}{2},2)$；$(\frac{2}{3},3,\frac{1}{2})$，$(3,\frac{1}{2},\frac{2}{3})$，$(\frac{1}{2},\frac{2}{3},3)$；$(1,1,1)$ 等 10 組序對都為所求.

二、有 25 匹馬參加賽馬，已知每一匹馬的跑速固定，且它們的跑速都不一樣。若每一場賽馬最多只能有五匹馬參加，不測實際速度，只得名次。那麼最少要安排多少場賽馬才可得知跑速最快的第一名、第二名、第三名各為哪一匹馬？

【參考解答】：可用七場賽事確定速度最快前三名：

A、25 匹馬分五組 A, B, …比賽，共五場賽事；

B、各組首名比一場，此場次第一名速度第一；

設獲此場次第一爲 A 組首名，B 組首名獲此場次第二，餘此類推。

C、速度總名次爲第二、三名的只能出現在 A 組第二、三名、B 組第一、二名、C 組第一名，（其它馬匹由前六場已知有至少三匹馬比它們快）。此五匹八再比一場決定第二、三名。

證明七場爲最少：以 25 點記這些馬，在一賽事後按名次將相鄰的連線稱爲邊，如兩場賽事名次如下：

A	B	C	D	E
B	F	G	D	H

則繪圖如下：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[dr] & C \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[dr] & E \\ & & F \arrow[r] & G \arrow[u] & H \end{tikzcd}$$

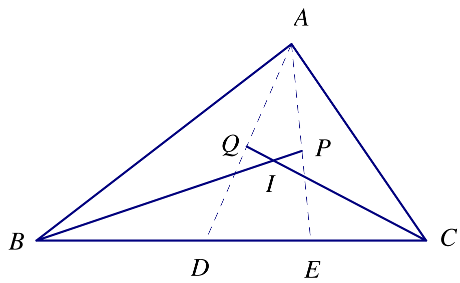
若某兩匹馬的排序已在前面的賽事在圖上表示，則不用再加線。

若只需六場，經過六場賽事後得一圖 G，此圖有 25 個點，最多得 $6\times 4=24$ 邊，因第一的一定能與其它的比，第一名的點與其它點中間有一路徑連接，整個圖上任何兩點都可連接。由第一名的點開始，每新增加一點，至少增加一邊，但因最多有 24 邊，每次剛好增加一邊，如從某一點分枝出去。可推論沒有兩匹馬同時參加兩場賽事，否則有迴圈

形成，或邊由前一場所得的，後一場因重履，不須再加，邊數會少於 24。
若最快的馬參加兩場以上，則連結它的點的邊多於兩條，無法判斷第二快的馬。若只參加一場，但這是這樣的安排出現的最佳情形，安排沒有可能預先知道它是最快的，若它不是最快，在這一場它拿不到第一名，因此它一定會參與二場以上的賽事。證畢。

三、如圖，在 ΔABC 中，$\angle BAC \geq 120°$，D, E 為 $\overline{BC}$ 邊上的二點，使得 $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ 將 $\angle BAC$ 三等分，且 $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的角平分線分別交 $\overline{AE}, \overline{AD}$ 於點 P 與點 Q，而 I 為 ΔABC 的內心。試證：$\overline{BC}+\overline{PQ}<\overline{BP}+\overline{CQ}\leq\overline{BC}+\overline{DE}$。

【參考解答】:



Pf (1)

$\overline{PB}+\overline{CQ}=(\overline{BI}+\overline{PI})+(\overline{CI}+\overline{QI})$

$=(\overline{BI}+\overline{CI})+(\overline{PI}+\overline{QI})>\overline{BC}+\overline{PQ}$

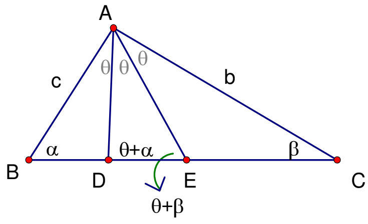
(2)
若 $\angle BAC > 135°$, 則 $\angle BPE > 90° > \angle BEP$;

故 $\overline{BE}>\overline{BP}$ (大角對大邊)

同理, $\angle CQD > 90° > \angle CDQ$,

得知 $\overline{CD}>\overline{CQ}$ (大角對大邊)

因此, $\overline{BP}+\overline{CQ}<\overline{BE}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$



若 $120° \leq \angle BAC \leq 135°$,

則令 $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{DE}=k$

先證 $\overline{BC}+\overline{DE}\geq\overline{AB}+\overline{AC} \Leftrightarrow a+k\geq b+c \Leftrightarrow a^2+2ak+k^2\geq b^2+2bc+c^2$

由餘弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 3\theta \geq b^2+c^2+bc$

$(\because \cos 3\theta \leq \cos 120° = -\frac{1}{2})$

$\therefore$ 只需證 $2ak+k^2\geq bc$。

事實上，我們可以證明 $2ak\geq bc$ 如下：

在ΔADE中，由正弦定理

$$\Rightarrow \frac{\overline{DE}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AE}}{\sin(\theta+\alpha)} \quad —— ①$$

在ΔACE中，由正弦定理

$$\Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\sin\beta}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\pi-\theta-\beta)}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\theta+\beta)} \quad —— ②$$

而$\overline{AC}=2R\sin\alpha=b$

$\Rightarrow$由①②

$$\Rightarrow k=\overline{DE}=\frac{\sin\theta\sin\beta\cdot\overline{AC}}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$$

又有$c=2R\sin\beta$，$a=2R\sin 3\theta$

$$\therefore\ 2ak\ge bc \quad\Leftrightarrow\ 2\cdot\frac{b\sin\theta\sin\beta}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}\cdot 2R\sin 3\theta\ge 2bR\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2\sin\theta\sin 3\theta}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}\ge 1$$

而事實上可以證

$2\sin\theta\sin 3\theta\ge 1$

$\Leftrightarrow \cos 2\theta-\cos 4\theta\ge 1$ (積化和差)

$\Leftrightarrow \cos 2\theta-2\cos^2 2\theta+1\ge 1$

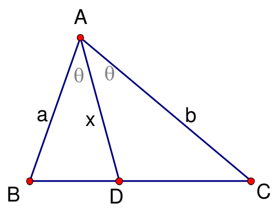
$\Leftrightarrow \cos 2\theta(1-2\cos 2\theta)\ge 0$

而$\because 40^\circ\le\theta\le 45^\circ\Rightarrow 80^\circ\le 2\theta\le 90^\circ$

故上式成立，即得到 $\overline{BC}+\overline{DE}\ge\overline{AB}+\overline{AC}$ 。

另一方面，我們需要以下的引理：

【引理】若$\overline{AD}$爲銳角ΔABC之角平分線，則有$\overline{AB}+\overline{AC}\ge 2\overline{AD}$ 。



【證】

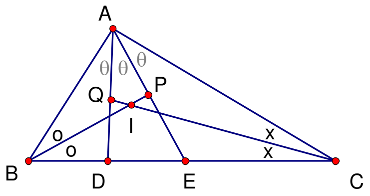
由$\Delta ABD+\Delta ACD=\Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin\theta=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \overline{AD}=\frac{2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\theta}{\overline{AB}+\overline{AC}}\le\frac{2\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB}+\overline{AC}}\le\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$$

$\therefore\ \overline{AB}+\overline{AC}\ge 2\overline{AD}$ 。

回到原題：



$\overline{BC}+\overline{DE}=\overline{BE}+\overline{CD}$

$\geq \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})+\frac{1}{2}(\overline{BE}+\overline{CD})$ (由 $\overline{BC}+\overline{DE}\geq\overline{AB}+\overline{AC}$)

$=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BE})+\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{CD})$

$\geq \overline{BP}+\overline{CQ}$ 。 (由引理得)