第二十屆，1978

Day I

1. M 與 n 為自然數且 $n>m\geq 1$。證設 1978^m 與 1978^n 的十進制表示法最後三位數相同。求滿足此假設並使得 $m+n$ 為最小的 m 與 n 。

2. 令 P 為某已知球內部的點，而 A,B,C 為球面上三點，且 PA,PB,PC 相互垂直，由 PA,PB,PC 決定的平行六面體與 P 點對角相向的頂點為 Q ，求 Q 點的軌跡。

3. 下面兩個集合互不相交且他們的聯集是所有正整數。

$$\{f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots\},$$
$$\{g(1),g(2),\cdots,g(n),\cdots\},$$

已知

$$\{f(1)<f(2)<\cdots<f(n)<\cdots\},$$
$$\{g(1)<g(2)<\cdots<g(n)<\cdots\},$$

並且對所有 $n\geq 1, g(n)=f\left(f(n)\right)+1$。試求 $f(240)$ 的值。

Day II

4. ABC 為一三角形且 $AB = AC$ 。在 ABC 外接圓的內部有一圓與外接圓相切，並分別切 AB, AC 於 P, Q 二點。證明 PQ 線段的中點恰為 ABC 內切圓的圓心。

5. 令 $\{a_k\}(k = 1,2,3,\cdots\cdots, n,\cdots\cdots)$ 為相異正整數的序列。證明對所有正整數 n ，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

6. 某一國際組織的 1978 名會員來自六個成員國。會員分別編號為 1,2,⋯,1978。證明至少有某一會員的編號，恰為他同國家另兩位會員編號的和，或為同國家另一位會員編號的兩倍。