第十六屆，1974

Day I

1. A, B, C 三位玩下列遊戲：在三張牌上各寫上一個整數。這三數 p, q, r 滿足 $0<p<q<r$。三張牌洗了之後每人發一張。然後每人照牌上的數字分得此數量的籌碼。接著又重新洗牌，而每人都保有他的籌碼。
這種程序（洗牌、發牌、分籌碼）至少做了兩輪以上。在最後一輪之後，A 總共有 20 個籌碼，B 有 10 個，C 有 9 個。在最後一輪 B 分到 r 個籌碼，請問誰在第一輪分到 q 個籌碼？

2. 在三角形 ABC 上，證明在邊 AB 上有一點 D 使得 CD 為 AD 與 DB 之幾何中項的充要條件是

$$\sin A \sin B \le \sin^2 \frac{C}{2}$$

3. 證明對任意整數 $n \ge 0$ $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ 不能被 5 整除。

Day II

4. 考慮將一個 8×8 的西洋棋盤分割成 p 個不重疊的長方形，且具有下列性質：
   (i) 每一個長方形內的白方格和黑方格一樣多個。
   (ii) 若a_i為第 i 個長方形內的白方格數，則

   $$a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_p$$

   求在所有可能的分割中 p 之最大值；並對此 p 值，求出所有可能的序列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_p$ 。

5. 判定

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

   之所有可能的值，其中a,b,c,d 為任意正數。

6. 設 p 為一整係數之非常數多項式。若有$n(p)$個整數k 使得$(p(k))^2 = 1$，證明 $n(p) - \deg(p) \le 2$ ，其中$\deg(p)$表 p 的次數。