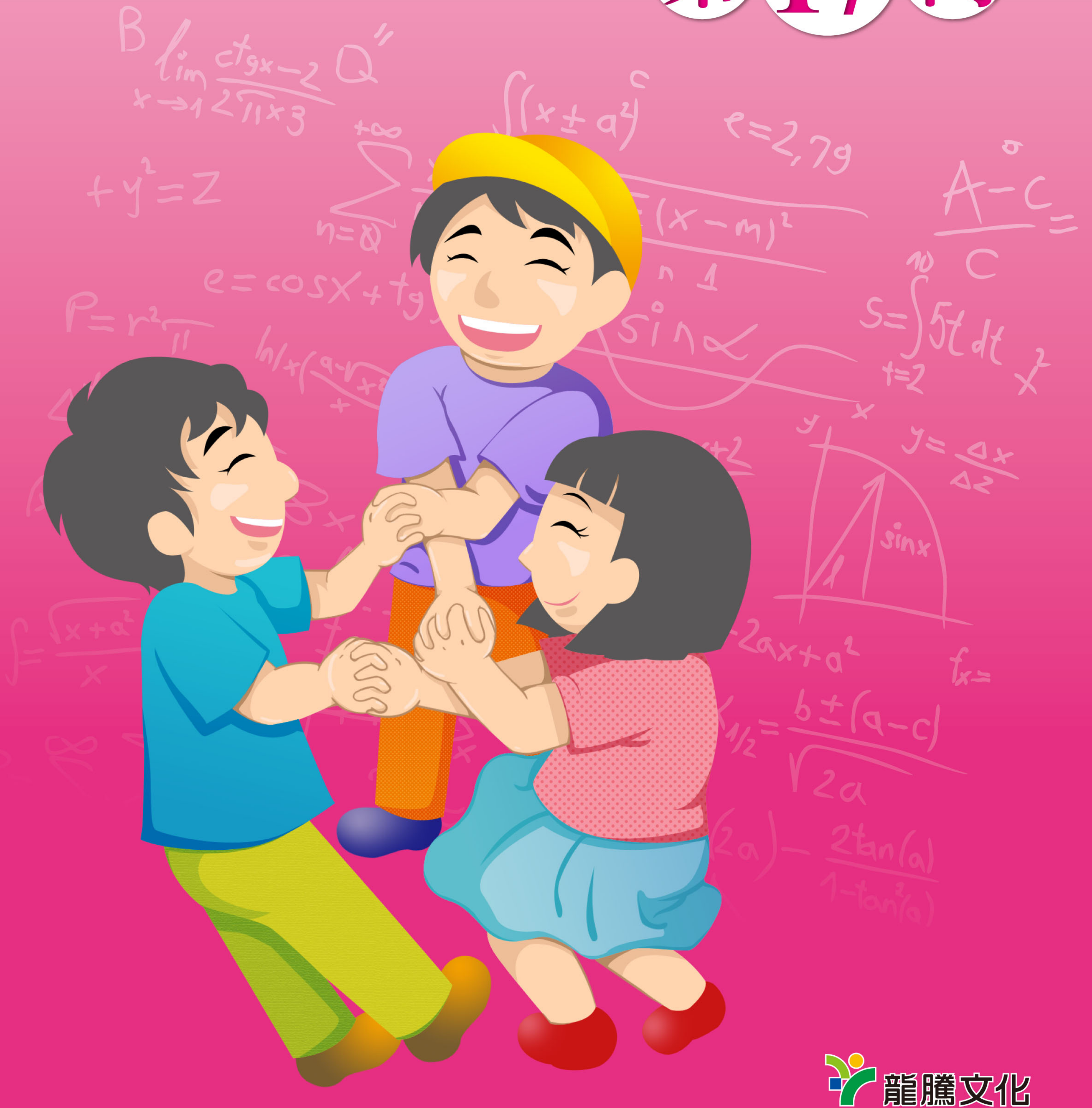
龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第17刊



龍騰文化

編輯室墨記

在這資訊爆炸、人手一智慧型手機的今日，搭車的閒暇之餘正是手指頭大戰益智遊戲的時候；憤怒鳥（Angry Birds）就是一款非常成功的例子，拋物線是這道遊戲的精髓，只要好好掌握，就可以過關。生活中的遊戲處處都與數學知識相關，「戲說數學」中的例子：雞同鴨講…相間何太急、亂點鴛鴦譜…圓圈數…等，都是藉由遊戲寓教於數學。你是否也可以從生活中的遊戲發現數學呢？先來讀讀這篇「戲說數學 序」，再告訴我們你有哪些有趣的發現！

大安高工林恆理老師藉由與學校老師討論一道 TRML 試題，著手開始進行這個題目的研究，並證明其過程。讓我們來欣賞這道條件非常簡潔的題目，如何得到漂亮結果。

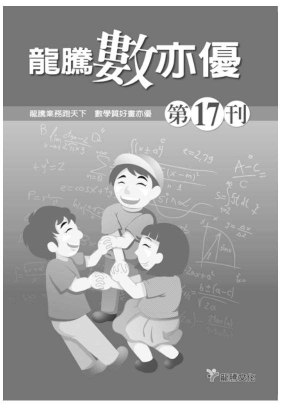
中山女高的鄭金樹、洪瑞英老師提供一道看似單純的題目，讓學生透過思考，呈現出至少有十種不同的解法。學生藉由無窮的潛力、透過互動的思考，跳脫框框、宏觀的看數學，更能體會數學之美。

《聖經密碼》一書中發現許多諸如「拉賓遇刺」這樣的句子，這本書裡宣稱：上帝在聖經裡預警了幾千年後的災難，言之鑿鑿、似有所本。江慶昱老師利用「鴿籠原理」解釋爲什麼預言沒有實現，看下去您就知道！

試試本期中的動手玩數學第68題：某晚有四個傷兵需要渡過一條每次最多只能承載兩個士兵的破橋，以逃離敵方砲火，該四個士兵只有一支手電筒，而且必須以較慢的士兵的速度行走；請你想想如何讓士兵在最短時間內過橋。

※ 竭誠邀稿：

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 lien_chang@lungteng.com.tw。



發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
副總編輯：陳美吟
執行編輯：莊莉錚
美術編輯：范文禎

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五權七路1號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2299-5311
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2012/03/15
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2012.03 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

許志農 臺灣師大數學系

3

》》戲說數學 序

林恒理 臺北市立大安高工

15

》》一道 TRML 試題的解析

鄭金樹 洪瑞英 臺中市立中山女高

18

》》一題多解數學思考的呈現

江慶昱 臺中市衛道中學退休教師

22

》》鴿籠原理

趙文敏 臺灣師大數學系

26

》》Apollonius 問題—兼談三條件決定圓（五）

許志農 臺灣師大數學系

38

》》新北市 100 學年度市立高中職數學科競賽試題

許志農 臺灣師大數學系

43

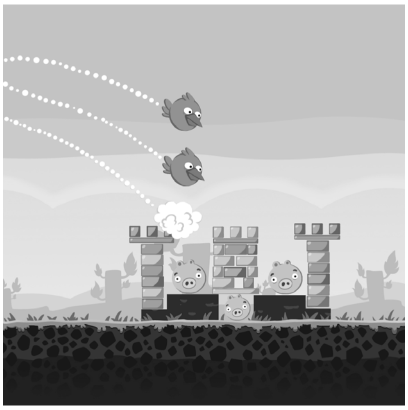
》》動手玩數學專欄

》》動手玩數學《第 16 期》破解秘笈

戲說數學 序

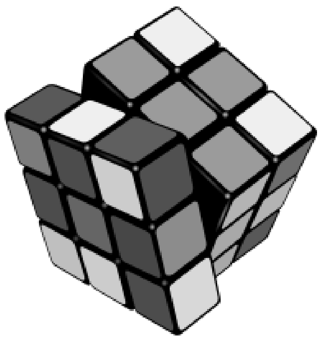
許志農／臺灣師大數學系

在智慧型手機與平板電腦逐漸普及的今日，開發老少咸宜、雅俗共賞的益智遊戲成爲賺錢的大商機，憤怒鳥遊戲（Angry Birds）就是一款非常成功的範例：



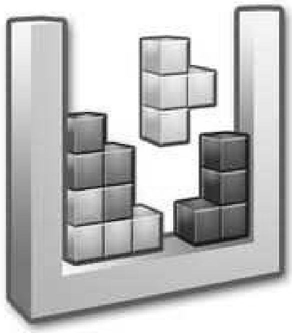
拋物線是憤怒鳥遊戲的精髓，也是這道遊戲唯一所需要掌握的數學，掌握得好就可以過關斬將，進入更高階的關卡。

在 1974 年，匈牙利的建築學和雕塑學教授魯比克發明了第一個魔術方塊（Rubik’s Cube），從此魔術方塊熱快速的傳播到全世界，據說魔術方塊的權利金讓魯比克一度成爲匈牙利的首富：



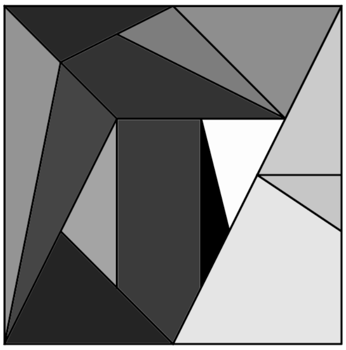
空間中的旋轉與變化是魔術方塊的數學基礎，這些都是透過中心的轉軸來完成。在更早之前，西方的 14-15 滑板遊戲與中國的華容道遊戲也是跟魔術方塊類似的遊戲，差別在於它們是平面的轉換，不是立體的變換。人們所處的環境是三維的世界，立體的魔術方塊會更吸引我們。本質上，這些遊戲都跟代數學的群論有很大的關聯，只是外行的玩出熱鬧來，而內行的探究其數學道理。

前蘇聯科學家阿列克謝在 1984 年利用空閒時間所編寫的俄羅斯方塊遊戲（Tetris），是風靡全世界的電腦遊戲，也是落下型益智遊戲的始祖：



在第一次波斯灣戰爭期間，俄羅斯方塊遊戲是前線美軍最常拿來消磨時間的遊戲之一。遊戲中所落下的四方連塊都是由四塊正方形相連所構成的，排除旋轉與鏡射外，一共只有五種四方連塊。由於俄羅斯方塊具有數學性、動態性與知名度，也經常被用來作爲遊戲程式設計的練習題材。

遠在兩千兩百多年前，希臘科學家阿基米得也發明過有趣的拼圖遊戲，稱它爲胃痛拼圖，其目的是要把十四塊多邊形拼成一整塊正方形：



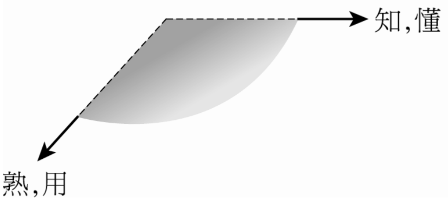
胃痛拼圖的奧妙之處在於它多達 17152 種拼法，除了對阿基米得的巧思切割感到吃驚外，更要感謝平面幾何帶來的美學。

以上所簡介的四道膾炙人口的遊戲，都是以某種數學基礎架構而成，而且又具有很棒的美學效果，究竟這些有趣的數學遊戲是如何誕生的呢？讓我們作更進一步的探索。

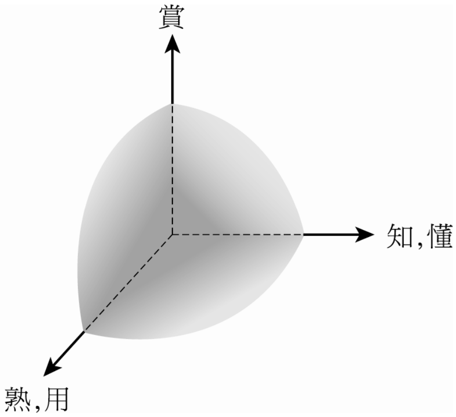
匈牙利數學家喬治 • 波利亞寫過一本名著《如何解題》，教導人們透過各種數學概念，思維與工具來進行解題；但是，波利亞似乎沒有寫過《如何命題》這方面的書籍，無論是憤怒鳥遊戲、魔術方塊、俄羅斯方塊、胃痛拼圖或者教科書裡的數學題目，它們都是屬於「如何命一道有意思的數學題目」的範疇。解題牽涉到的僅是數學知識的策略應用與組合方法，而命題卻含有相當主觀的成分，甚至命題與數學素養極爲相關。到底該如何界定數學素養呢？我們可以用「知、懂、熟、用、賞」這五個字來概括，「知、懂」的程度在要求知道或讀懂數學知識；「熟、用」的深度是指熟練跟會使用數學知識進行解題；而「賞」的境界則較爲深奧，意指在生活中遇到與數學相關的事物都能辨識，連結與欣賞。

如果用 x 軸度「知、懂」的程度，y 軸量「熟、用」的深度，那麼學過或讀懂的數學書籍越多，x 軸就越長；能使用的數學技巧或熟悉的數學工具越多，y 軸就越深。如此，將 x 代表學過的數學知識，y 表示使用此知識的能力，就可以在 xy 平面上畫出一塊對應的區域，這塊區域就呈現出解題的策略與組合的情形，面積越大代表解題能力越強。當我們進一步在這塊

解題區域的每一個點畫上「辨識，連結與欣賞數學事物」的高度（即用 z 來度量「賞」的素養）時，就形成一座高山，這座高山就是數學素養，體積越大代表著命題水準越高。



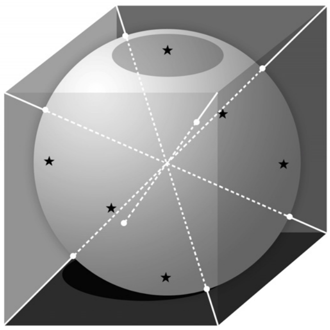
解題能力



命題水準

就以憤怒鳥遊戲爲例，它是以拋物線爲數學背景所設計出來的遊戲，設計者在拋物線這個點的鑑賞能力很高，才能想到與設計出這道遊戲。同樣地，魔術方塊、俄羅斯方塊與胃痛拼圖，他們分別以立體幾何的變換，四方連塊的變化與多邊形的貼合爲數學背景，所設計出來很吸睛的遊戲。

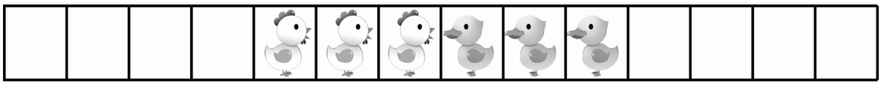
這裡所要表達的是「解題能力可以用 xy 平面上的一塊區域的面積來計算，而命題水準是素養的問題，必須用立體空間上的體積來衡量；解題跟『知、懂、熟、用』的能力有關，命題還要考慮『賞』的素養。」最後以乾隆皇帝收藏的一件藝術精品「雕象牙透花人物套球」作結尾：



這玲瓏精緻的象牙套球目前收藏在臺北故宮博物館，它是由十七層可以靈活轉動的球體所構造完成，從最外層的球體往內挖，必須連挖十六層，而且每層球體的表面都鏤雕人物或雕有幾何花紋。幫乾隆完成這件手上玩物的能工巧匠，必定具有精確計算的幾何概念。仔細觀察套球，可以發現它有十四個孔，這關鍵的十四孔是如何分布，才能往下穿鑿十六層呢？當我們把最外層的球體擺在一個正立方體內，讓立方體的六個面都與球體相切，再從球體的中心畫出與正立方體頂點相連的連線，這八條連線與球體表面剛好交八個點。這相切的六點加上相交的八個點，一共十四個點，就是套球上十四個孔的中心位置。在數代能工巧匠的實驗嘗試後，終於發現這關鍵的十四孔扮演著相當重要的角色。乾隆皇帝手上把玩的這象牙套球就是以立體幾何上的這十四孔爲背景，所構造完成的藝術精品，把它算成數學藝術也不爲過。

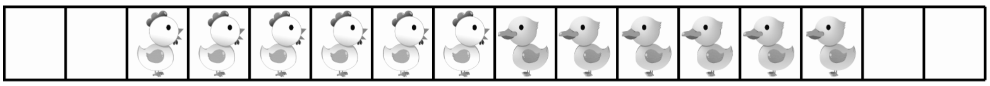
雞同鴨講‧‧‧相間何太急

這裡所要介紹的遊戲是改編自香港網站上「機靈金幣」的遊戲。在下圖中，有三隻雞與三隻鴨排成一列，中間沒有空格，而且左邊三隻為雞，右邊三隻為鴨。每次只能抓取相鄰的兩隻，並將牠們移動到其他相鄰的兩個空格上，不可以交換雞與鴨的左右次序。當三隻雞、鴨（即三隻雞與三隻鴨）相鄰地排成一排，而且雞與鴨剛好相間（雞與鴨相鄰）時，完成遊戲：



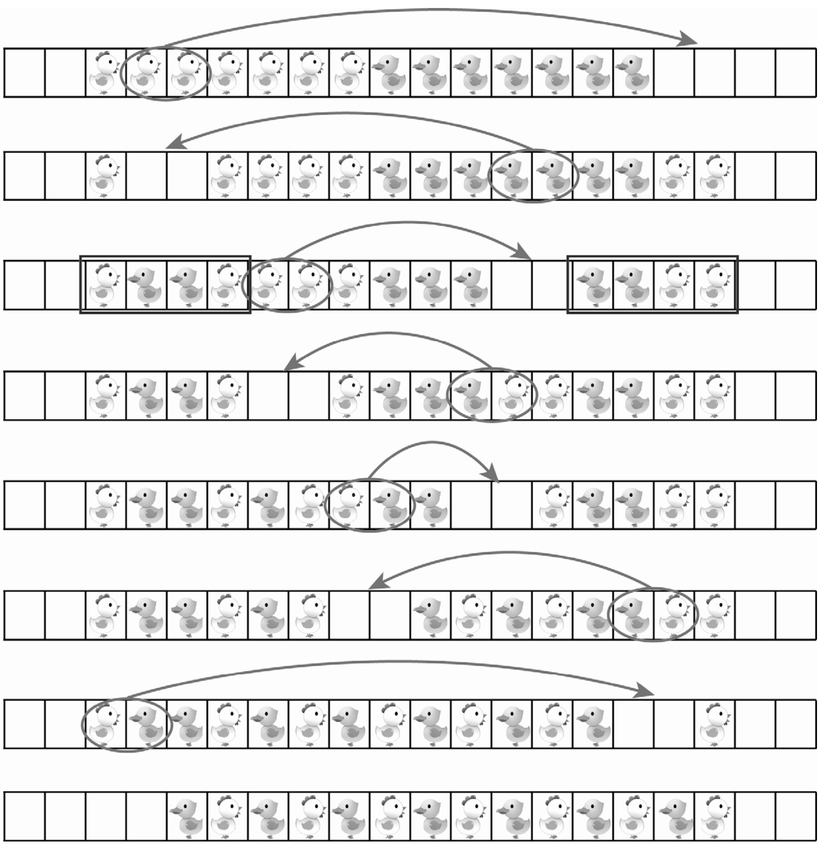
要完成三對雞、鴨相間的排列並不困難，我們的要求是：最少可以在多少次的抓取內完成它。經過練習之後，相信讀者可以找到三次的抓取方法。這裡把抓取遊戲延伸為

當雞與鴨改為六對時，也就是說，有 6 隻雞與 6 隻鴨排成一列，任兩隻中間沒有空格，而且左邊 6 隻為雞、右邊 6 隻為鴨，至少需要幾次的抓取，方能讓這 12 隻雞與鴨完全相鄰，而且雞與鴨相間。



從比較少的對數嘗試起，是一個可行的方法；從少隻雞鴨的抓取中累積經驗或者看出策略，是進行數學思考相當重要的步驟。

師大數學系李曉玫同學針對六對雞、鴨情形提出 7 次的抓取方法，如下圖所示：



她也預期這是最少次的抓取方法，並給n對雞、鴨的一般情形提出最少抓取次數的猜測如下：

①當$n=1$時，0 次（雞與鴨已經相鄰且相間）。

②當$n=2$時，無法完成。

③當$n=4k+2$（即$n=6,10,14,\cdots$）時，至少需要$n+1$次。

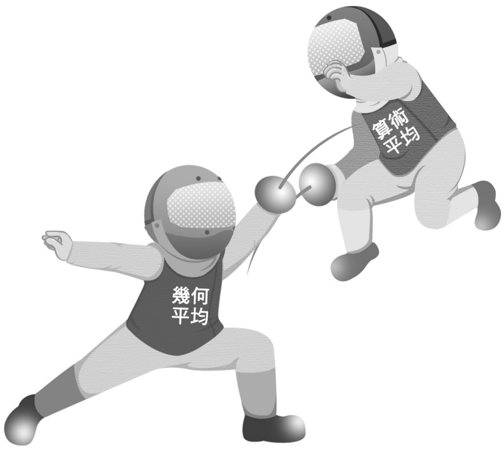
④當n不是上述情形時，都是n次。

以上的數據只是臆測，需要透過數學給予嚴密的證明，才算正確的答案。

算幾大戰…時間與智慧的累積

在時間長河的緩慢流動與人類智慧的加速累積下，很多重要的數學定理一再地被挖掘與找到各種不同型式的證明方法。幾何學的「勾股定理」與代數學的「質數有無窮多個」就是經典的兩個代表。在十九世紀初，高斯曾對數論裡的一個定理，現稱爲高斯互反定理，一連給了五種不同的證明。

中學的「算幾不等式」、「柯西不等式」與「正、餘弦定理」也是數學愛好者尋找各種不同證明方法的好題材，甚至有些證明方法大同小異或者重複地被提出來。



吳建生老師與張海潮教授對算幾不等式討論出一種簡單的證明方法，介紹如下：

給定任意 n 個正數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ，它們的算術平均數

$$\mu = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

大於或等於它們的幾何平均數

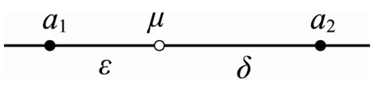
$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \ ,$$

而且等號成立的條件爲 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 。

在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 這 n 個數中，當每一個數都跟算術平均數 μ 相等時，容易得到

$$\mu = g \ .$$

另外，在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 這 n 個數中，當有一個比算術平均數 μ 小時，代表至少有一數比 μ 大，設比 μ 小的數爲 a_1 ，比 μ 大的數爲 a_2 ，並令它們與 μ 的差分別爲 ε 與 δ ，如下圖所示：



不妨假設 $\varepsilon \le \delta$ ，此時造 n 個新的正數如下：

$$A_1 = a_1 + \varepsilon, A_2 = a_2 - \varepsilon, A_3 = a_3, A_4 = a_4, \cdots, A_n = a_n \ .$$

這新造的n個數有以下的性質：

①它們的算術平均數也是μ：

因爲從第三項起都一樣，又

$$A_1 + A_2 = \left(a_1 + \varepsilon\right) + \left(a_2 - \varepsilon\right) = a_1 + a_2 \ ,$$

所以算術平均數也是μ。

②它們的幾何平均數g_1比原來的幾何平均數g大：

因爲從第三項起都一樣，所以只需比較前兩項的乘積即可。由

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= \left(a_1 + \varepsilon\right)\left(a_2 - \varepsilon\right) \\ &= a_1 a_2 + \varepsilon\left(a_2 - a_1 - \varepsilon\right) \\ &= a_1 a_2 + \varepsilon\delta > a_1 a_2 \ . \end{aligned}$$

知$g_1 > g$。

如果把上述過程稱爲一次操作，那麼繼續操作下去，我們每回得到的算術平均數都是μ，而幾何平均數$g_1, g_2, g_3, \cdots$會滿足

$$\cdots > g_3 > g_2 > g_1 > g \ .$$

但是，至多操作n次，就會讓每個數都調整成μ，即此時的幾何平均數爲μ，又

$$\mu > \cdots > g_3 > g_2 > g_1 > g \ .$$

因此，在$a_1, a_2, \cdots, a_n$這n個數中，當有一個比算術平均數μ小時，我們有

$$\mu > g \ .$$

亂點鴛鴦譜…圓圈數

每個人都有兩隻手，在亂點鴛鴦譜的活動中，每人的每一隻手都恰與另一隻手（可以是自己的另一隻手或他人的手）握住。這時所有人的手交錯揪成一團，但是仔細辨識，還是可以區分哪幾個人是相連在一塊的，這些相連在一塊的人剛好圍成一個圓圈。最小的圓圈就是自己的兩隻手握在一起，再來就是兩個人的兩隻手互相握在一起，形成兩個人的圓圈，…。

如果只有三個人，那麼圍出的圓圈數之期望值是多少呢？

這道問題也可以抽象為：隨手取出 n 條線，共計有 $2n$ 個端點，首先將兩個端點綁在一塊，再將另兩個端點綁在一塊，如此進行下去，把最後的兩個端點也綁在一塊。此時，這 n 條直線會圍成數個圓圈；令 E_n 代表所結圓圈數的期望值，

(1) 求 E_1 的值。

(2) 證明 E_n 滿足遞迴關係

$$E_n = E_{n-1} + \frac{1}{2n-1} \ .$$

(3) 求 E_2, E_3, E_4 的值。

我們分析如下：

(1) 當 1 條繩子時，剛好圍成一個圓圈，即 $E_1 = 1$。

(2) 在 n 條繩子的情況：

①第一次選取的兩點剛好是同一條繩子的端點之機率為 $\dfrac{n}{C_2^{2n}} = \dfrac{n}{\frac{(2n)(2n-1)}{2}} = \dfrac{1}{2n-1}$，

此時所圍成的圓圈數為 $1 + E_{n-1}$。

②第一次選取的兩點剛好是不同條繩子的端點之機率爲$1-\dfrac{1}{2n-1}=\dfrac{2n-2}{2n-1}$，

此時所圍成的圓圈數爲E_{n-1}。

綜合①與②，我們有

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{1}{2n-1}\times\left(1+E_{n-1}\right)+\frac{2n-2}{2n-1}\times E_{n-1}\\ &= E_{n-1}+\frac{1}{2n-1}.\end{aligned}$$

(3) 利用$E_1=1$及遞迴關係

$$E_n = E_{n-1}+\frac{1}{2n-1},$$

我們得

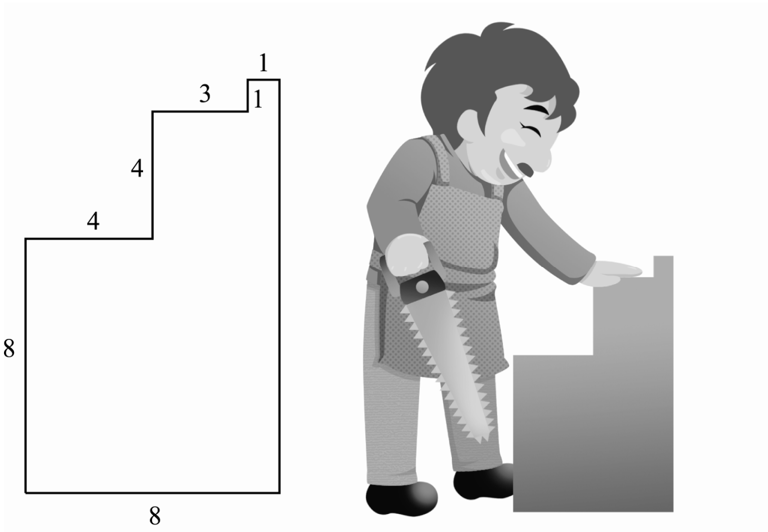
$$E_2 = E_1+\frac{1}{2\cdot 2-1}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\ ;$$

$$E_3 = E_2+\frac{1}{2\cdot 3-1}=\frac{4}{3}+\frac{1}{5}=\frac{23}{15}\ ;$$

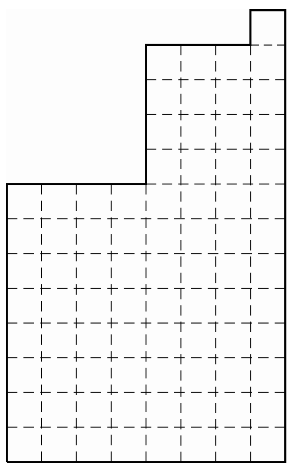
$$E_4 = E_3+\frac{1}{2\cdot 4-1}=\frac{23}{15}+\frac{1}{7}=\frac{176}{105}\ .$$

鋸木為方…如何拼出正方形

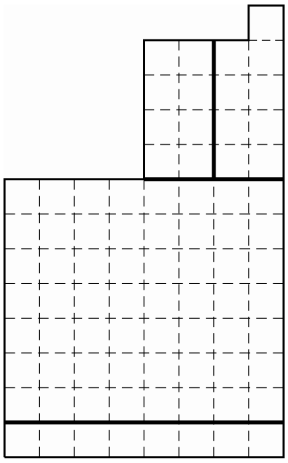
建中九十年度推甄科學能力試題的第十五題，是一道益智遊戲題，大意是說：木匠有一塊木板，他想沿著虛線將它鋸成若干塊，然後拼成一張正方形的桌面。鋸成的塊數越少，表示使用的方法越好，最棒的鋸法是幾塊呢？

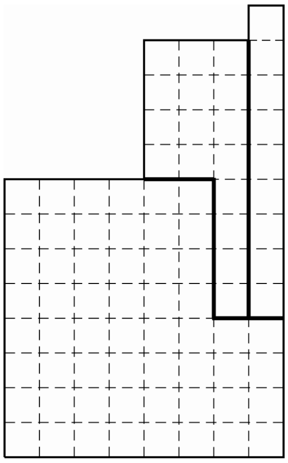


這問題有許多種不同的鋸法，找出自己的鋸法。



以下提供兩種鋸法，試著拼看看：

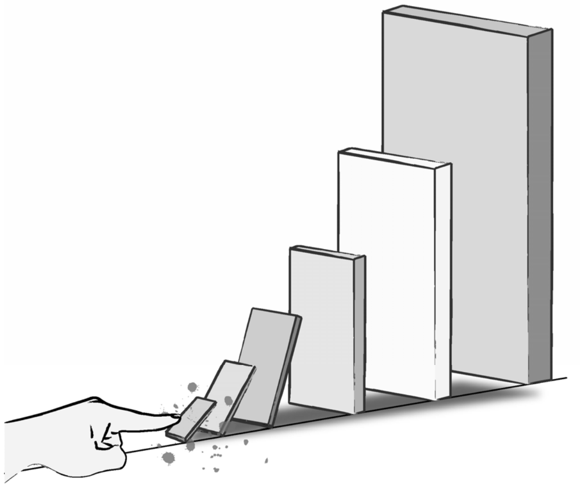




這兩種方法都是昌爸工作坊的方法，其中的第二種方法是臺北市和平高中林慶達老師提供的，三塊完成，但需要鋸四次；第一種方法可以鋸三次完成，但會有四塊。

多米諾骨牌效應…牽一髮而動全身

根據研究：每一張骨牌倒下時能推倒一張 1.5 倍體積的骨牌。英國哥倫比亞大學物理學家懷特海德依據這個原理，製作了一組骨牌，第一張重 1 公克最輕，以後每張重量擴大爲前一張的 1.5 倍，把這套骨牌按適當間距排好，輕輕推倒第一張，必然會波及到下一張及推倒以後的骨牌。



根據萬有引力定律測得：地球質量爲 5.976×10^{27} 公克，試問：懷特海德所排的骨牌中，第幾張的重量會比地球還重？

多米諾骨牌效應常指一系列的連鎖反應，即「牽一髮而動全身」，類似的情況有蝴蝶效應，蝴蝶效應起源於氣象學家洛倫茨所提出的一篇名叫「亞馬遜雨林的一隻蝴蝶拍一下翅膀會不會在德州引起龍捲風？」的論文。

設第 n 張的重量會比地球還重，根據題意可得

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\geq 5.976\times10^{27}\ .$$

將兩邊取對數，得

$$(\log3-\log2)(n-1)\geq 27+\log5.976\ .$$

將對數表的數據 $\log2=0.3010$， $\log3=0.4771$， $\log5.976=0.7764$ 代入，得

$$(0.4771-0.3010)(n-1)\geq 0.7764+27\ ,$$

解得

$$n-1\geq 157.7308\cdots\ ,$$

即第 159 張的重量會比地球還重。

一道TRML試題的解析

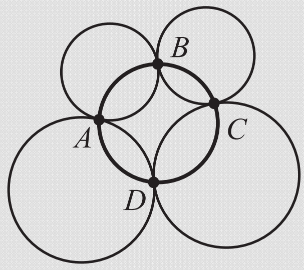
林恆理／臺北市立大安高工

日前，學校同事向我詢問一道 TRML（臺灣區高中數學競賽）的試題，他覺得答案有錯，而且覺得爲什麼這個圓半徑是個定值？題目如下：

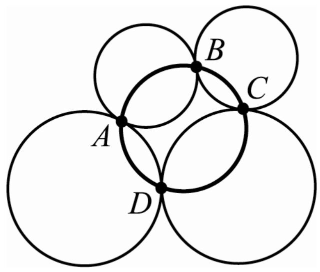
2003TRML 接力賽：

如右圖，四個圓相互切於四個點 A,B,C,D ，上兩圓半徑爲 4，下兩圓半徑爲 6，此四個切點會落在一個半徑爲 r 的圓上，試求 r 之值。

參考答案： $4\sqrt{6}$



這個題目的條件非常簡潔，結果卻非常漂亮。我們透過 GeoGebra 的動態模擬，確實發現無論四個圓如何移動（如圖一），四個切點一定共圓，而且這個圓面積爲定值 24π ，所以答案應爲 $2\sqrt{6}$ 。於是著手開始進行這個題目的研究。



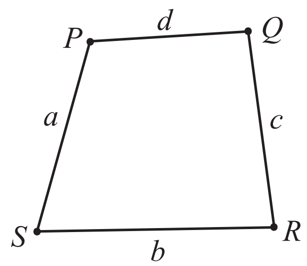
《圖一》

在證明的過程中需要一個定理，就是 Bretschneider 在 1842 年提出的「四邊形面積公式」，其內容如下：

如右圖，若四邊形 $PQRS$ 的邊長爲 a,b,c,d ，

令 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ ，Δ 爲此四邊形的面積，則

$$\Delta^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\times\cos^2\left(\frac{\angle S+\angle Q}{2}\right)$$ 。



證明的過程請見 http://scicomp.math.ntu.edu.tw/calculus/question_17.php 或蔡聰明的《數學的發現趣談》（2002）。

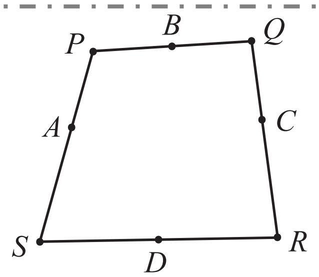
筆者將題目重新改寫如下：

如右圖，有一四邊形 $PQRS$， A,B,C,D 分別在四個邊上，

其中 $\overline{SA}=\overline{SD}=\overline{RD}=\overline{RC}=6$ ， $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{QB}=\overline{QC}=4$ ，試證

(1) A,B,C,D 四點共圓。

(2) 承上，此圓的半徑爲 $2\sqrt{6}$ 。



(1) 連接$\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}$（如圖二），令$\angle PAB = x_1, \angle QBC = x_2, \angle RCD = x_3, \angle SDA = x_4$,

因爲△PAB 爲等腰三角形，所以$\angle P = \pi - 2x_1$，

同理，$\angle Q = \pi - 2x_2, \angle R = \pi - 2x_3, \angle S = \pi - 2x_4$。

因爲四邊形內角和爲2π，

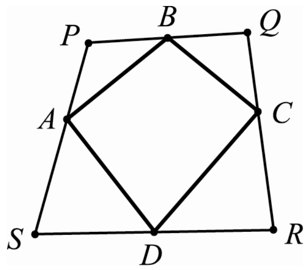
所以$\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S = 4\pi - 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 2\pi$，

得$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \pi$。

由於$\angle ABC = \pi - x_1 - x_2, \angle ADC = \pi - x_3 - x_4$，

所以$\angle ABC + \angle ADC = 2\pi - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = \pi$，

故A,B,C,D四點共圓。



《圖二》

(2) 令A,B,C,D共圓的圓心爲O，半徑爲r，連接$\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC},\overline{OD},\overline{OP},\overline{OQ},\overline{OR},\overline{OS}$，

令$\angle ODS = \theta, \angle OSD = \alpha, \angle OQC = \beta$（如圖三），$\Delta$爲$PQRS$的面積。

2.1 因爲△OSD≅△OSA（SSS 全等），

△OSD的面積爲$\frac{1}{2} \times 6 \times r\sin\theta = 3r\sin\theta$，

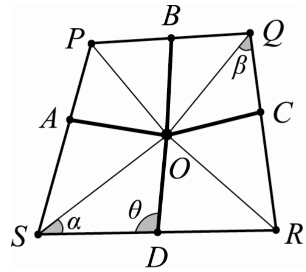
故四邊形$OASD$的面積爲$6r\sin\theta$，

同理，四邊形$ODRC$的面積爲$6r\sin\theta$，

四邊形$OCQB$的面積爲$4r\sin\theta$，

四邊形$OBPA$的面積爲$4r\sin\theta$，

因此，$\Delta = 6r\sin\theta \times 2 + 4r\sin\theta \times 2 = 20r\sin\theta$。



《圖三》

2.2 考慮$PQRS$的面積，由「四邊形面積公式」，$s = \frac{8+10+10+12}{2} = 20$，

$$\Delta^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \times \cos^2\left(\frac{\angle S + \angle Q}{2}\right)$$
$$= 12 \times 10 \times 10 \times 8 - 12 \times 10 \times 10 \times 8 \times \cos^2(\alpha + \beta)$$
$$= 9600\left(1 - \cos^2(\alpha + \beta)\right)$$
$$= 9600\sin^2(\alpha + \beta),$$

因此，$\Delta = 40\sqrt{6}\left|\sin(\alpha+\beta)\right| = 40\sqrt{6}\sin(\alpha+\beta)$（$\because 0 < \alpha + \beta < \pi$），

在△OSD中，由餘弦定理，$\overline{OS} = \sqrt{r^2 + 36 - 12r\cos\theta}$,

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + 36 - 12r\cos\theta + 36 - r^2}{12\sqrt{r^2 + 36 - 12r\cos\theta}} = \frac{6 - r\cos\theta}{\sqrt{r^2 + 36 - 12r\cos\theta}}，$$

再由正弦定理，$\sin\alpha = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2 + 36 - 12r\cos\theta}}$。

同理，在$\triangle OCQ$中，$\cos\beta=\dfrac{4-r\cos\theta}{\sqrt{r^2+16-8r\cos\theta}},\sin\beta=\dfrac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2+16-8r\cos\theta}}$，

因此，$\Delta=40\sqrt{6}\sin(\alpha+\beta)=40\sqrt{6}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$$=\frac{80\sqrt{6}r\sin\theta(5-r\cos\theta)}{\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}\times\sqrt{r^2+16-8r\cos\theta}}$$ 。

2.3 由 2.1 和 2.2 可得$\Delta=20r\sin\theta=\dfrac{80\sqrt{6}r\sin\theta(5-r\cos\theta)}{\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}\times\sqrt{r^2+16-8r\cos\theta}}$

$$\Rightarrow 1=\frac{4\sqrt{6}(5-r\cos\theta)}{\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}\times\sqrt{r^2+16-8r\cos\theta}}$$ ，

兩邊同時平方後，$(r^2+36-12r\cos\theta)(r^2+16-8r\cos\theta)=96(5-r\cos\theta)^2$，

展開後，$r^4+52r^2-20r^3\cos\theta-480r\cos\theta+96r^2\cos^2\theta+576$

$$=2400-960r\cos\theta+96r^2\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow r^4+52r^2-1824=20r^3\cos\theta-480r\cos\theta$$

$$\Rightarrow (r^2-24)(r^2+76)=20r\cos\theta(r^2-24)$$

$\Rightarrow r^2-24=0$ 或 $r^2+76=20r\cos\theta$ 。

2.3.1 當$r^2+76=20r\cos\theta$時，由 2.3 的第二行可得

$$(5-r\cos\theta)>0\Rightarrow\left(5-\frac{r^2+76}{20}\right)>0\Rightarrow r^2<24$$ ，

又$\overline{OS}=\sqrt{r^2+36-12r\cos\theta}>0\Rightarrow r^2+36-12\cdot\dfrac{r^2+76}{20}>0\Rightarrow r^2>24$（$\rightarrow\leftarrow$）。

2.3.2 當$r^2=24$時，$r=2\sqrt{6}$，故得證。

整個證明過程中，雖然用到四個未知數，但是α,β可用r,θ表示，再利用兩種面積的算法，得到r,θ的恆等式，最後很神奇的分解出只有r的因式，才得到答案。這個題目放在接力賽中，個人認爲不太可能用上述的方法解出來（除非還有更簡潔的作法），但是如果學生知道用特殊化的方法，就是假定這四邊形爲等腰梯形，應該是有可能在時間內解出來。

一題多解數學思考的呈現

鄭金樹 洪瑞英／臺北市立中山女高

題目：已知α為銳角，$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，求$\sin\alpha$之值。

看似單純的題目，透過學生的思考呈現，至少有十種不同的解法，讓身為教師的我們，再一次感受到學生的無窮潛力。以下為學生呈現的十種解法！

〔解法一〕

因為α為銳角，$-\dfrac{\pi}{6}<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，所以$\alpha-\dfrac{\pi}{6}$為銳角，可得$\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，

$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，得$\cos\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha-\dfrac{6}{5}$，

代入$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow 100\sin^2\alpha-60\sqrt{3}\sin\alpha+11=0\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{60\sqrt{3}\pm 80}{200}=\dfrac{3\sqrt{3}\pm 4}{10}$，

因為$\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\alpha>\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，所以取$\sin\alpha=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$。

說明 學生直觀上利用和角公式展開，將所得關係式代入平方關係解方程式。

〔解法二〕

因為α為銳角，$-\dfrac{\pi}{6}<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，所以$\alpha-\dfrac{\pi}{6}$為銳角，可得$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，

$$\begin{cases}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{3}{5}\cdots\cdots① \\ \cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\cdots\cdots②\end{cases}$$

將①$\times\sqrt{3}+$②得$2\sin\alpha=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$。

說明 求出$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$與$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$之值，再透過其和角公式展開，解聯立方程式即可得所求之值。

〔解法三〕

因爲α爲銳角，$-\dfrac{\pi}{6}<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，所以$\alpha-\dfrac{\pi}{6}$爲銳角，可得$\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$，

$$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{4}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{4+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3},$$

因爲α爲銳角，所以$\sin\alpha=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$。

說明 因爲正弦函數的和角公式展開有正弦、餘弦兩種函數，藉由角度的決定將之轉成正切函數，利用正切函數的和角公式展開，解正切值，再進而求出正弦值。

〔解法四〕

因爲α爲銳角，$-\dfrac{\pi}{6}<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，所以$\alpha-\dfrac{\pi}{6}$爲銳角，

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}。$$

說明 加上一角$\dfrac{\pi}{6}$，再利用和角公式展開，立即可得所求之值，雖是一樣利用和角公式，但此想法較漂亮，也許我們可以多提醒學生逆向的思考。

〔解法五〕

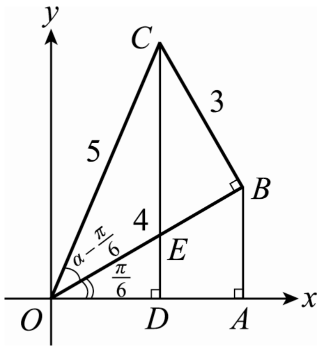
因爲α爲銳角，$-\dfrac{\pi}{6}<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，所以$\alpha-\dfrac{\pi}{6}$爲銳角，

如圖可知$\triangle CEB\sim\triangle OED$

$\Rightarrow\overline{CE}=3\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3},\overline{BE}=3\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$

$\overline{OE}=4-\sqrt{3},\overline{ED}=\dfrac{1}{2}\overline{OE}=\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$，

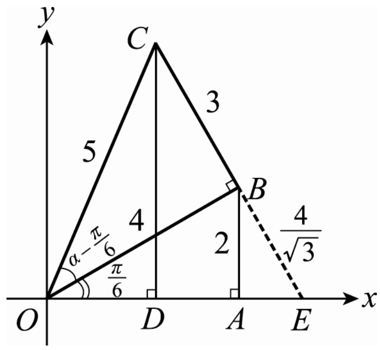
所以$\overline{CD}=\overline{CE}+\overline{ED}=2\sqrt{3}+\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$



$$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\frac{4+3\sqrt{3}}{2}}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}。$$

說明 此解法是以幾何概念爲基礎，利用圖形解之，其概念較接近國中所習數學。

〔解法六〕



如圖，延長 $\overline{BC}$ 交 x 軸於 E 點，

由圖可知，$\angle ABE=\frac{\pi}{6},\overline{AB}=2\Rightarrow\overline{BE}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ ，

所以 $\overline{CD}=\overline{CE}\times\cos\frac{\pi}{6}=\left(3+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\overline{CD}}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ 。

說明 延長線使得圖形單純化，所求更簡單、明瞭。此種想法的學生或許比解法五的學生更有創意！

〔解法七〕

因爲 α 爲銳角，$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$ ，又 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{6}$ 爲銳角，可得 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$ ，

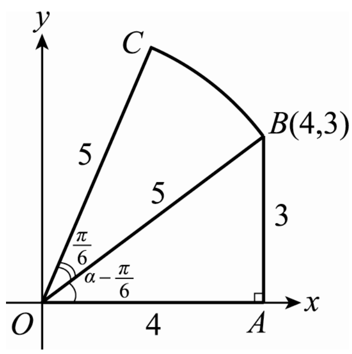
$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\Rightarrow\cos\alpha+i\sin\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)$ ，

對照虛部可得 $\sin\alpha=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ 。

說明 漂亮地利用二複數之極式乘除，其幅角加減的特性，即可得所求。

〔解法八〕

因爲 α 爲銳角，$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$ ，又 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$ ，所以 $\alpha-\frac{\pi}{6}$ 爲銳角，



如圖，將 $\overline{OB}$ 逆時針旋轉 $\frac{\pi}{6}$ 至 $\overline{OC}$ ，

利用二複數極式相乘，

$(4+3i)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}-3}{2}+i\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

得出 C 點坐標 $\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{2},\frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

所以 $\sin\alpha=\frac{\frac{4+3\sqrt{3}}{2}}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ 。

說明 利用圖形旋轉、複數相乘來解題，此種想法是對幾何圖象較強的學生容易呈現並使用的學習結果。由此想法對現行 99 課綱高二自然組學生，可衍生出利用旋轉矩陣的想法。

〔解法九〕

因爲α爲銳角，$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以$\alpha-\frac{\pi}{6}$爲銳角，

將$\alpha-\frac{\pi}{6}$逆時針旋轉$\frac{\pi}{6}$得角α，利用旋轉矩陣可得

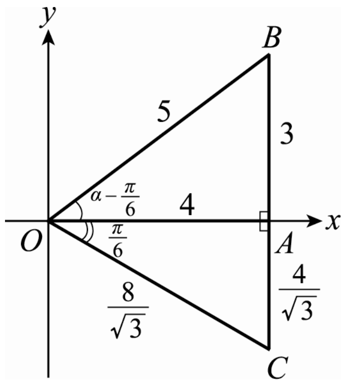
$$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\\ \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}\text{。}$$

說明 **由解法八，既爲利用旋轉的概念，以矩陣處理而得解法九。**

〔解法十〕

因爲α爲銳角，$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，又$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以$\alpha-\frac{\pi}{6}$爲銳角，

如圖，$\angle BOC=\alpha$，



利用餘弦定理求出$\cos\alpha=\dfrac{5^2+\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(3+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\times5\times\frac{8}{\sqrt{3}}}=\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$，

得出$\sin\alpha=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$。

說明 **與解法八的構思相似，進而利用餘弦定理解題。**

心得 》

大多數的學生會從解法一、二切入，少數學生會想到其他解法，其中解法六、七、八、九實爲一致的，皆是利用旋轉的概念，少數思考較靈活的學生能從此角度切入。從教學觀點視之，也許正是我們教學上可以多努力的地方。此題不失爲好題，因爲學生不難找到思考的出路，而教師亦能透過學生之解題過程更加了解學生思考的觸角與深度。

教師若能適時地引入一題多解的解法與學生分享討論，必能激盪出意想不到的火花，如解法十，不論教師或學生，透過此種互動思考過程，較不會只在框框中思考，跳脫框框，宏觀的看數學，更能體會數學之美。

鴿籠原理

江慶昱／臺中市衛道中學退休教師

※ 楔子 》

十幾年前，我有一個數學向來不錯的學生，他參加數學系甄試，據說當時教授問他：為什麼 $\frac{7}{23}$ 一定可以化為循環小數？這基本的數學原理課本不提、考試不考，老師當然不教，於是他被打敗了！

那些年，有一本熱賣書籍叫《聖經密碼》，作者 Michael Drosnin 把某一版本的聖經用電腦每隔幾個字母選取一個後排成一列，叫做等距密碼；結果發現許多諸如「拉賓遇刺」這樣的句子。Drosnin 在這本書裡宣稱：上帝在聖經裡預警了幾千年後的災難。言之鑿鑿、似有所本，真教人害怕。

培根說：所謂預言家，就是事後能解釋為什麼預言沒有實現。那麼，到底所謂《聖經密碼》是怎麼一回事？

※ 鴿籠原理 》

我們用一個淺顯的釋例說明鴿籠原理：七隻鴿子飛回鴿籠，如果鴿籠只有六個，則會有一個籠子裡至少有兩隻鴿子。

鴿籠原理也稱為抽屜原理或 Dirichlet 原理（P.G.L.Dirichlet 1805~1859），比較數學化的說法是：若把 $kn+1$ 個物件放入 n 個盒子，那麼一定有一個盒子中至少有 $k+1$ 個物件。

我們先看第一個故事：為什麼 $\frac{7}{23}$ 一定可以化為循環小數？

根據 **除法原理：被除數＝除數×商＋餘數**，因為餘數一定小於除數，所以把 7 除以 23，多除幾次，就 23 次吧！假如餘數都不相同，則餘數是 $1,2,3,\cdots,22$ ；但是鴿籠原理說，這是不可能的，其中一定至少有兩個餘數相同（就是說，現在有 23 隻鴿子飛回 22 個籠子），餘數相同的地方就產生循環！因此，$\frac{7}{23}$ 一定可以化為循環小數。

如果我們「認定」有限小數也是一種循環小數，則我們可以說所有的分數都是循環小數，所有的循環小數都是分數。

※ 鴿籠原理的推廣 》

第二個故事跟 Ramsey 定理有關。在平面上隨便畫 5 個點，任 3 點不共線，則其中一定會有 4 個點形成一凸四邊形，這是匈牙利數學家 Paul Erdos 小時候玩的遊戲。1935 年，他和 George Szekeres 證明了只要點數夠多，就可以找到任意的凸 n 邊形，並且發現他的定理只不過是 Ramsey 定理的特例。

Ramsey 定理說：不可能完全無序。意思就是說，只要點數夠多，我們就可以在裡面「看出」

有意義的圖像，所以你可以在夜空中看到各種星座。同理，叫一隻猩猩在打字機上亂打，只要字母夠長，你可以找到有意義的句子。

Drosnin 用電腦作所謂等距密碼，其實道理是一樣的。換句話說，你用其他書也可以找到「密碼」，例如《莎士比亞全集》或《白鯨記》。

※ 何謂 Ramsey 定理？ 》

集合 S 的子集 T 若有 m 個元素，稱 T 為 S 的 $m-$ 子集。將 S 中的 $m-$ 子集分為 $S_1,S_2,\cdots,S_t$ 等互不相交的 t 類，任意給定不小於 m 的 t 個整數 $q_1,q_2,\cdots,q_t$ ，一定可以找到一個最小整數 $N(q_1,q_2,\cdots,q_t;m)$ ，只要 S 的元素個數 $n\geq N(q_1,q_2,\cdots,q_t;m)$ ，則 S 中必定有一子集 T ，其元素個數為某一個 q_k ，且所有 T 的 $m-$ 子集都屬於 S_k 。

拉姆西（Frank Plumpton Ramsey 1903~1930）是一個非常聰明的英國數學家，不幸年輕早逝。Ramsey 定理的數學形式很抽象，他本人倒是舉了一個有名的例子：世界上任意六個人中，總有三個人相互認識，或互相皆不認識。（習作 6）

※ 無用之用 》

數學有什麼用？這是許多人的疑問；另一方面，許多數學營喜歡把鴿籠原理當作一個主題。這兩者之間的平衡點在哪裡？我想舉一個故事，也許值得參考。

1999 年，我當數學科召集人，我拿「建中通訊徵答（中學生通訊解題第三期 88301）」給學生做，當作校內有獎徵答。其中有一題如下：坐標平面上有相異的 10 個點，其中沒有 3 點在同一條直線上，每一點均為格子點，試證明這 10 個點兩兩之間的連接線段中，必有一個異於這 10 個點的格子點。（點 A 為格子點的意思，就是點 A 坐標 (m,n) 中， m,n 均為整數）

因為 10 個點坐標均為格子點，根據整數的奇偶性來分類，可分為 (奇,偶)、(偶,奇)、(奇,奇)、(偶,偶) 四個情形，故必有兩個頂點的坐標其奇偶性一樣；設這兩個點為 A,B ，則線段 $\overline{AB}$ 的中點 M 必為格子點，因為 10 點中任 3 點不共線，所以 M 必異於這 10 點。

這一題有兩個學生做對，其中一個是高一的學生，後來進了臺大醫學系。我的意思是說：所謂「無用」的數學中所表現的「數學成熟度」，或者說「抽象能力」，其實是人類智力的重要因素。鴿籠原理有許多極具挑戰性的習作，因此也受到一些數學營的青睞。

※ 後記 》

李國偉先生在《一條畫不清的界線》一書中闡述：在科學與偽科學之間畫一條清楚的界線不是一件容易的事。如《聖經密碼》一書是偽科學，可由 Ramsey 定理破解。

Ramsey 定理是鴿籠原理的推廣，這是組合學的範疇。可別小看了組合學，李國偉先生先專攻數理邏輯，後來轉攻組合學，使臺灣成為一個堅強的組合學研究團隊而揚名國際。
相關網站 http://combinatorics.math.sinica.edu.tw/comb_act/

※ 習作 》

1. 將 9 個正整數 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 重排成為 $b_1,b_2,\cdots,b_9$ ，則 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_9-b_9)$ 必為偶數。（數學的發現趣談，P.28）

2. 任給 7 個相異整數，求證其中必有兩數其和或差是 10 的倍數。

3. 在邊長為 1 的正方形內任取 5 個點，試證至少有兩個點的距離小於或等於 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

4. 從 1~100 的正整數中任取 51 個數，則其中會有 1 個數是另外 1 個數的倍數（然後改成從 1 到 $2n$ 的正整數中任取 $n+1$ 個數）。

5. 有一袋糖果隨意分給 15 個小孩，每個小孩至少分到 1 個，證明其中必有一些小孩所得的糖果數之和為 15 的倍數。（通訊解題）

6. 在一圓上取 6 個點，在每兩點間作連線段，如果把每個線段任意地塗成咖啡色或藍色，則有一個三角形的三邊同色。世界上任意六個人中，總有三個人相互認識，或互相皆不認識。

7. Paul Erdos 1913~1996，在前 n^2+1 個自然數中，至少必定有 $n+1$ 個是有序的（由小到大或由大到小），例如把 $1,2,3,4,5$ 作任意重排，則其中至少有 3 個數是遞增或遞減，如排成 $1,4,5,3,2$，則 $1,4,5$ 是遞增。

8. 設 m 是任一偶數，m 個整數 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 滿足 $1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_m\le m a_1+a_2+\cdots+a_m=2m$ ，試證：一定可以把這 m 個數分成兩組，使得每一組的和都是 m 。（抽屜原則及其他，P.66）

9. 對於任一實數 r ，存在一分數 $\frac{p}{q}$ ，使得 $\left|r-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$ （P.G.L.Dirichlet 原理）。

Sol

1. 如果 $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_9-b_9)$ 是奇數，則對 $i=1,\cdots,9, a_i-b_i$ 是奇數，則 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 中奇數與偶數個數一樣多，矛盾！

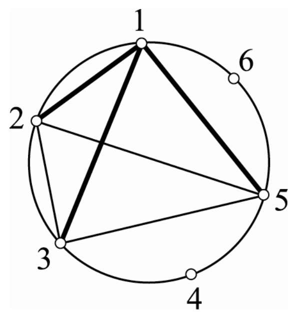
2. 考慮 $10k,\{10k+1,10k-1\},\cdots,\{10k+5,10k-5\}$ ，6 個「巢」則至少有兩個數在同一巢。

3. 把原正方形切成 4 個全等的小正方形。

4. 1~100 之間奇數與偶數各有 50 個，把它們寫成 $a_i=2^m b_i$，其中若 a_i 是奇數，則 $m=0$；又 b_i 是 $1,3,5,\cdots,99$ 裡面的數，今任取 51 個數，由鴿籠原理，存在兩個數長成 $2^m b_k, 2^n b_k$ 的樣子，亦即此兩數有倍數關係。

5. 假設 15 個小孩分得的糖果數為 $x_i, i=1,2,\cdots,15$ ，
令 $f(k)=x_1+x_2+\cdots+x_k$ ，考慮同餘類 $[1],[2],\cdots,[14]$（如果某一 $f(k)$ 落在 $[0]$ 內，則得證）；由鴿籠原理，存在某兩個數 m,n ， $f(m),f(n)$ 落在同一個籠子內，即 $f(m)\equiv f(n) \pmod{15}$ ，假設 $m>n$ ，則 $x_{n+1}+\cdots+x_m$ 是 15 的倍數，得證。

6. 考慮由點 1 與其他 5 點所連之線段，因為有 5 個線段，由鴿籠原理至少會有 3 個線段同色（圖中之粗線段），假設是 1-2，1-3，1-5；假設任 3 點所構成三角形的三邊皆不同色，所以 2-3 為藍色；同理，3-5 為藍色，則在考慮 2-5 時得到矛盾！



7. 抽屜原理及其他，凡異出版社，P.14

8. 抽屜原理及其他，凡異出版社，P.66

9. 數學探奇，P.87

參考資料

1. 抽屜原理及其他，凡異出版社，P.97
2. 黃光明，組合學漫談，數學傳播季刊，第 4 期第 1 卷
3. 數學傳播季刊，第 4 期第 14 卷，P.100
4. 棋盤染色問題與二部 Ramsey 數，數學傳播季刊，第 3 期第 21 卷，P.63
5. 張鎮華，幸福結局問題—鴿籠原理與拉姆西定理，數學傳播季刊，第 2 期第 28 卷，P.28
6. 通過問題學解題，九章出版社，P.97
7. 米蓋爾・德・古斯曼，數學探奇，P.87
8. 不只一點瘋狂，P.109
9. 蔡聰明，數學的發現趣談，P.28
10. 科學教育月刊，第 232 期
11. 李國偉，一條畫不清的界線
12. 謝聰智，鴿籠原理 http://w3.math.sinica.edu.tw/media/media.jsp?voln=24
13. 宴會問題 $R(3,3)=6, R(4,4)=18, R(5,5)=?$
    http://www.sciencenews.org/sn_arc99/12_4_99/mathland.htm
14. 許志農，算術講義，http://math.ntnu.edu.tw/~maco/

Apollonius 問題—

兼談三條件決定圓(五)

趙文敏／臺灣師大數學系

⑩ 圓圓圓問題（續）

四、 圓$O_2(r_2)$與圓$O_3(r_3)$是位於圓$O_1(r_1)$內部且半徑不相等的一對外離圓（設 $r_1>r_2>r_3$），又圓心O_1 、 O_2與O_3不共線。

《作圖法》

在此情形中，所求圓共有八個解（如圖 70 所示），依相切狀況分成四組。

第一組兩解：（如圖 71 所示）

兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切，與圓$O_2(r_2)$都內切，與圓$O_3(r_3)$都內切；

而且兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而都將圓$O_2(r_2)$與圓$O_3(r_3)$包在其內部（切點除外）。

第二組兩解：（如圖 72 所示）

兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切，與圓$O_2(r_2)$都內切，與圓$O_3(r_3)$都外切；

而且兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而都將圓$O_2(r_2)$包在其內部（切點除外）。

第三組兩解：（如圖 73 所示）

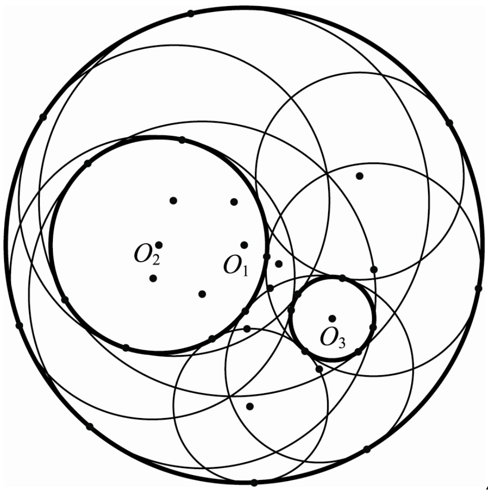
兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切，與圓$O_2(r_2)$都外切，與圓$O_3(r_3)$都內切；

而且兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而都將圓$O_3(r_3)$包在其內部（切點除外）。

第四組兩解：（如圖 74 所示）

兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切，與圓$O_2(r_2)$都外切，與圓$O_3(r_3)$都外切；

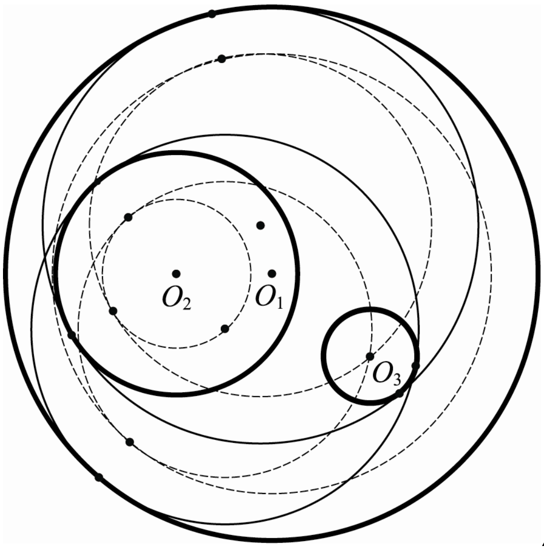
而且兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外）。



▲圖 70

＊ 第一組：與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$都內切的圓

1. 因爲圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$爲內離且半徑不相等；點O_3在圓$O_1(r_1-r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2-r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$的連心線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第十種情形的作圖法（利用圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$的外相似中心），作出過點O_3且與$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$都內切的圓。依「點圓圓」問題第十種情形第一組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心爲圓心，將半徑增長r_3後爲半徑作圓，即可得出與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$都內切的兩個圓。此兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而都將圓$O_2(r_2)$與圓$O_3(r_3)$包在其內部（切點除外）。



▲圖 71

《證明》

若一圓$X(t)$與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$都內切，又圓$X(t)$被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而將圓$O_2(r_2)$與圓$O_3(r_3)$都包在其內部（切點除外），則其圓心X必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1}=r_1-t\ ,\ \ \overline{XO_2}=t-r_2\ ,\ \ \overline{XO_3}=t-r_3\ \ .$$

消去t後得

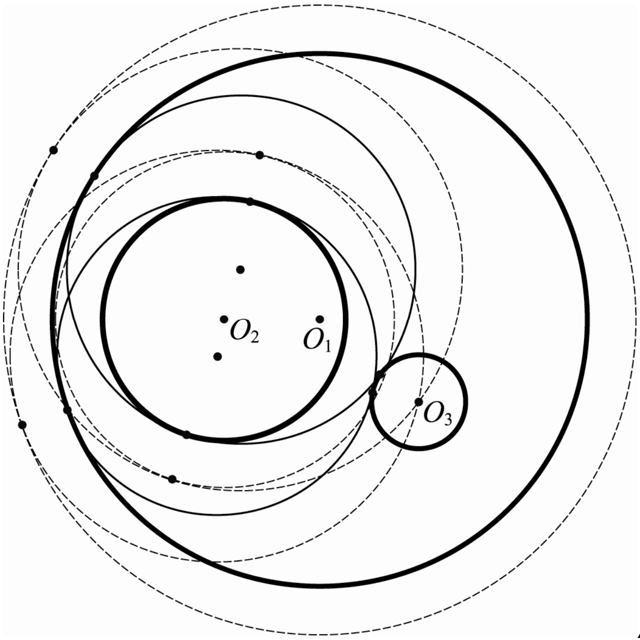
$$\overline{XO_1}+\overline{XO_3}=r_1-r_3\ ,\ \ \overline{XO_2}-\overline{XO_3}=-(r_2-r_3)\ \ .$$

由此可知：圓心X是橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$較靠近焦點O_2的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點X也是過點O_3且與$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$都內切之圓的圓心。

因爲圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$內離且半徑不相等，點O_3在圓$O_1(r_1-r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2-r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$的連心線上。所以，橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$有四個交點。但因爲前段所提的交點，只限定是雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$的其中一支與橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$的交點；所以，所得的交點只有兩點。

＊ 第二組：與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$內切而與圓$O_3(r_3)$外切的圓

1. 因爲圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$內離且半徑不相等；點O_3在圓$O_1(r_1+r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2+r_3)$的外部，但不在圓$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$的連心線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第十種情形的作圖法（利用圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$的外相似中心），作出過點O_3且與$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$都內切的圓。依「點圓圓」問題第十種情形第一組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心爲圓心，將半徑減短r_3後爲半徑作圓，即可得出與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$內切而與圓$O_3(r_3)$外切的兩個圓。



▲圖 72

《證明》

若一圓$X(t)$與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$內切而與圓$O_3(r_3)$外切，又圓$X(t)$被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而將圓$O_2(r_2)$包在其內部（切點除外），則其圓心X必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1}=r_1-t\ ,\ \ \overline{XO_2}=t-r_2\ ,\ \ \overline{XO_3}=r_3+t\ \ .$$

消去t後得

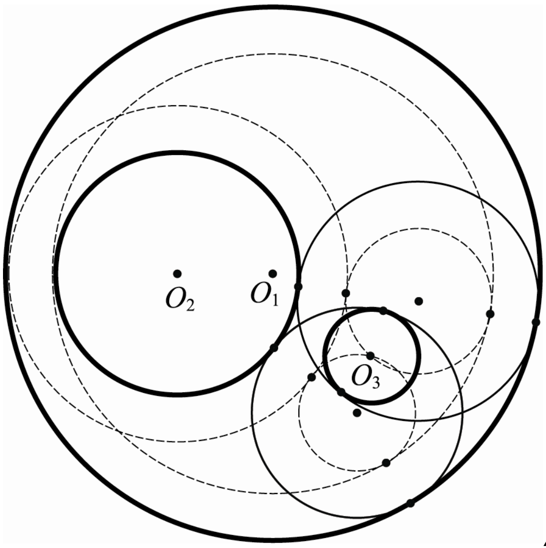
$$\overline{XO_1}+\overline{XO_3}=r_1+r_3\ ,\ \ \overline{XO_2}-\overline{XO_3}=-(r_2+r_3)\ \ .$$

由此可知：圓心X是橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$較靠近焦點O_2的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點X也是過點O_3且與$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$都內切之圓的圓心。

因爲圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$內離且半徑不相等，點O_3在圓$O_1(r_1+r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2+r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$的連心線上。所以，橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$有四個交點。但因爲前段所提的交點，只限定是雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$的其中一支與橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$的交點；所以，所得的交點只有兩點。

＊ 第三組：與圓$O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$內切而與圓$O_2(r_2)$外切的圓

1. 因為圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$相交於兩點或內切或內離，點O_3在圓$O_1(r_1-r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2+r_3)$的外部，但不在圓$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$的連心線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第五、八、十等三種情形的作圖法（利用圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$的內相似中心），作出過點O_3且與$O_1(r_1-r_3)$內切而與$O_2(r_2+r_3)$外切的圓。依「點圓圓」問題第五、八、十等三種情形第二組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第1點所作兩圓的圓心為圓心，將半徑增長r_3後為半徑作圓，即可得出與圓$O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$內切而與圓$O_2(r_2)$外切的兩個圓。



▲圖 73

《證明》

若一圓$X(t)$與圓$O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$內切而與圓$O_2(r_2)$外切，又圓$X(t)$被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而將圓$O_3(r_3)$包在其內部（切點除外），則其圓心X必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1}=r_1-t\ ,\ \ \overline{XO_2}=t+r_2\ ,\ \ \overline{XO_3}=t-r_3\ \ .$$

消去t後得

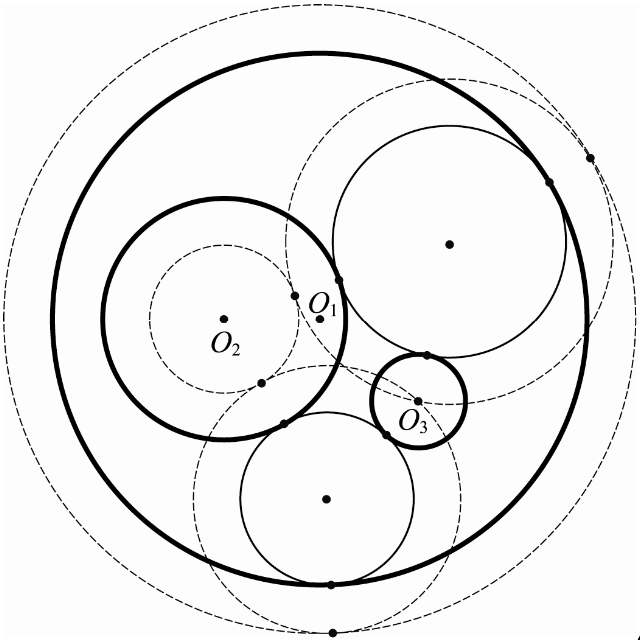
$$\overline{XO_1}+\overline{XO_3}=r_1-r_3\ ,\ \ \overline{XO_2}-\overline{XO_3}=r_2+r_3\ \ .$$

由此可知：圓心X是橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$較靠近焦點O_3的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點X也是過點O_3且與$O_1(r_1-r_3)$內切，與$O_2(r_2+r_3)$外切之圓的圓心。

因為圓$O_1(r_1-r_3)$與圓$O_2(r_2+r_3)$相交於兩點或內切或內離，點O_3在圓$O_1(r_1-r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2+r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1-r_3)$，$O_2(r_2+r_3)$的連心線上。所以，橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$有四個交點。但因為前段所提的交點，只限定是雙曲線$H(O_2,O_3;r_2+r_3)$的其中一支與橢圓$E(O_1,O_3;r_1-r_3)$的交點；所以，所得的交點只有兩點。

＊ 第四組：與圓$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$外切而與圓$O_1(r_1)$內切的圓

1. 因爲圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$內離且半徑不相等，點O_3在圓$O_1(r_1+r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2-r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$的連心線上。所以，可仿照「點圓圓」問題第十種情形的作圖法（利用圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$的內相似中心），作出過點O_3且與圓$O_1(r_1+r_3)$內切而與圓$O_2(r_2-r_3)$外切的圓。依「點圓圓」問題第十種情形第二組圓作圖法的結果，此種圓共兩解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作兩圓的圓心爲圓心，將半徑減短r_3後爲半徑作圓，即可得出與圓$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$外切而與圓$O_1(r_1)$內切的兩個圓。



▲圖 74

《證明》

若一圓$X(t)$與圓$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$外切而與圓$O_1(r_1)$內切，又圓$X(t)$被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），則其圓心X必滿足下述條件：

$$\overline{XO_1}=r_1-t\ ,\ \ \overline{XO_2}=t+r_2\ ,\ \ \overline{XO_3}=t+r_3\ .$$

消去t後得

$$\overline{XO_1}+\overline{XO_3}=r_1+r_3\ ,\ \ \overline{XO_2}-\overline{XO_3}=r_2-r_3\ .$$

由此可知：圓心X是橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$較靠近焦點O_3的一支的交點。另一方面，由上述兩式可知：點X也是過點O_3且與圓$O_1(r_1+r_3)$內切，與圓$O_2(r_2-r_3)$外切之圓的圓心。

因爲圓$O_1(r_1+r_3)$與圓$O_2(r_2-r_3)$內離，點O_3在圓$O_1(r_1+r_3)$的內部而在圓$O_2(r_2-r_3)$的外部，但不在兩圓$O_1(r_1+r_3)$，$O_2(r_2-r_3)$的連心線上。所以，橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$與雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$有四個交點。但因爲前段所提的交點，只限定是雙曲線$H(O_2,O_3;r_2-r_3)$的其中一支與橢圓$E(O_1,O_3;r_1+r_3)$的交點；所以，所得的交點只有兩點。

五、 圓$O_2(r_2)$位於圓$O_1(r_1)$內部，圓$O_3(r_3)$與圓$O_1(r_1)$內切又與圓$O_2(r_2)$外切，$r_1 > r_2$且 $r_1 > r_3$；又圓心O_1， O_2與O_3不共線。

《作圖法》

在此情形中，所求圓共有四個解（如圖 75 所示），依相切狀況分成三組。有兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切、與圓$O_2(r_2)$都外切、與圓$O_3(r_3)$都外切（第四組圓）。

第一組一解：（如圖 76 所示）

此圓與圓$O_1(r_1)$內切，與圓$O_2(r_2)$內切，與圓$O_3(r_3)$內切；

而且此圓被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而都將圓$O_2(r_2)$與圓$O_3(r_3)$包在其內部（切點除外）。

第二組一解：（如圖 77 所示）

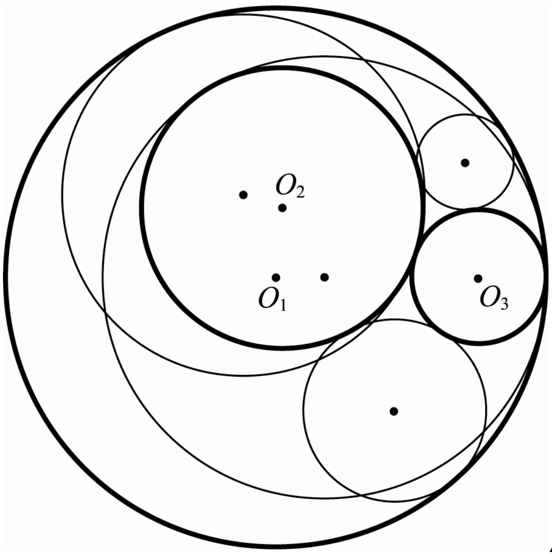
此圓與圓$O_1(r_1)$內切，與圓$O_2(r_2)$內切，與圓$O_3(r_3)$外切；

而且此圓被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外），而將圓$O_2(r_2)$包在其內部（切點除外）。

第四組兩解：（如圖 78 所示）

兩圓與圓$O_1(r_1)$都內切，與圓$O_2(r_2)$都外切，與圓$O_3(r_3)$都外切；

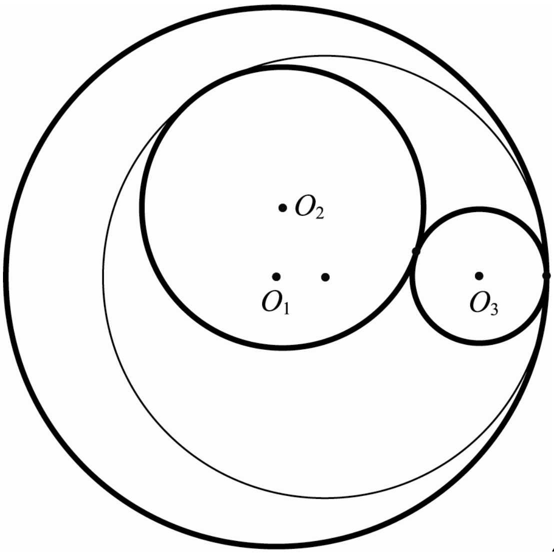
而且兩圓都被圓$O_1(r_1)$包在其內部（切點除外）。



▲圖 75

＊ 第一組：與圓$O_1(r_1)$， $O_2(r_2)$， $O_3(r_3)$都內切的圓

1. 設圓$O_1(r_1)$， $O_3(r_3)$內切的切點爲點A_1，過點A_1與圓$O_1(r_1)$， $O_3(r_3)$相切的共同切線爲直線l_1，則直線l_1與圓$O_2(r_2)$不相交。因爲圓心O_1， O_2與O_3不共線。所以，點A_1不在圓心O_2至直線l_1的垂直線上。於是，仿照「點線圓」問題第二種情形的作圖法，作出過點A_1且與直線l_1相切又與圓$O_2(r_2)$內切的圓。依「點線圓」問題第二種情形第二組圓作圖法的結果，此種圓共一解。
2. 以上述作圖法第 1 點所作的圓與圓$O_1(r_1)$， $O_2(r_2)$， $O_3(r_3)$都內切。



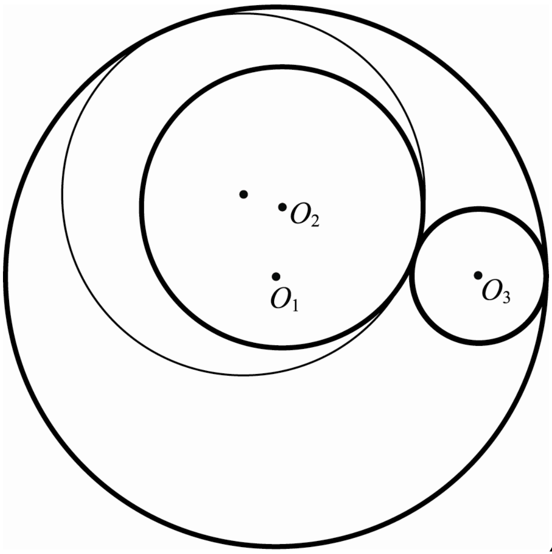
▲圖 76

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ 都內切，則因爲圓 $O_2(r_2)$ 位於圓 $O_1(r_1)$ 內部而圓 $O_3(r_3)$ 與圓 $O_1(r_1)$ 內切又與圓 $O_2(r_2)$ 外切，所以，圓 X 被圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部（切點除外），而且圓 X 將圓 $O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）。若圓 X 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點不是圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點 A_1，則當圓 X 被圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_1(r_1)$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有交點）；當圓 X 將圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點 A_1 在圓 X 的內部（因爲此切點在圓 $O_3(r_3)$ 上）。於是，圓 $O_1(r_1)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），也有些點在圓 X 的外部（因爲圓 X 不能將圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部），這與圓 X、圓 $O_1(r_1)$ 相切的假設矛盾。因此，圓 X 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點就是圓 $O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$ 內切的切點 A_1，而且圓 X 與圓 $O_1(r_1)$，$O_3(r_3)$ 的共同切線 l_1 相切於點 A_1。由此可知：圓 X 就是過點 A_1 且與直線 l_1 相切又與圓 $O_2(r_2)$ 內切的圓。

∗ 第二組：與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切的圓

1. 設圓 $O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ 外切的切點爲點 A_2，過點 A_2 與圓 $O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ 相切的共同切線爲直線 l_2，則直線 l_2 與圓 $O_1(r_1)$ 相交於兩相異點。因爲圓心 O_1，O_2 與 O_3 不共線。所以，點 A_2 不在圓心 O_1 至直線 l_2 的垂直線上。請注意：儘管點 A_2 在圓 $O_1(r_1)$ 的內部，但仍可以仿照「點線圓」問題第二種情形第二組圓的作圖法，作出過點 A_2 且與直線 l_2 相切又與圓 $O_1(r_1)$ 內切的圓。我們將作圖法寫成下面的第 2 點。
2. 在過點 A_2 且與直線 l_2 垂直的直線上作點 A_2' 使得：點 A_2' 與圓心 O_1 位於直線 l_2 的同側，而 $\overline{A_2A_2'}=r_1$。設 $\overline{O_1A_2'}$ 的垂直平分線與直線 A_2A_2' 相交於點 X。以點 X 爲圓心且過點 A_2 的圓即爲所求，此圓與圓 $O_1(r_1)$ 內切。此種圓共一個。



▲圖 77

《證明》

若一圓 $X(t)$ 與圓 $O_1(r_1)$， $O_2(r_2)$ 內切而與圓 $O_3(r_3)$ 外切，則因爲圓 $O_2(r_2)$ 位於圓 $O_1(r_1)$ 內部而圓 $O_3(r_3)$ 與圓 $O_1(r_1)$ 內切又與圓 $O_2(r_2)$ 外切，所以，圓 X 被圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部（切點除外），而且圓 X 將圓 $O_2(r_2)$ 包在其內部（切點除外）。若圓 X 與圓 $O_2(r_2)$ 內切的切點不是圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 外切的切點 A_2，則當圓 X 被圓 $O_2(r_2)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_3(r_3)$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有交點）；當圓 X 將圓 $O_2(r_2)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 外切的切點 A_2 在圓 X 的內部（因爲此切點在圓 $O_2(r_2)$ 上）。於是，圓 $O_3(r_3)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），這與圓 X 、圓 $O_3(r_3)$ 外切的假設矛盾。因此，圓 X 與圓 $O_2(r_2)$ 內切的切點就是圓 $O_2(r_2)$， $O_3(r_3)$ 外切的切點 A_2。

因爲圓 X 過點 A_2 且與直線 l_2 相切，而且點 A_2 在直線 l_2 上；所以，圓 X 與直線 l_2 相切於點 A_2。於是，其圓心在過點 A_2 且與直線 l_2 垂直的直線上。因爲

$$\overline{XA_2} = \overline{A_2A_2'} - \overline{XA_2'} = r_1 - \overline{XA_2'} = r_1 - \overline{XO_1} \; .$$

所以，以點 X 爲圓心， $\overline{XA_2}$ 爲半徑的圓必與圓 $O_1(r_1)$ 內切。

* 第三組：與圓 $O_1(r_1)$， $O_3(r_3)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切的圓

《證明》

此情形中爲什麼沒有第三組圓呢？其理由如下：設圓 X 與圓 $O_1(r_1)$ 內切，與圓 $O_2(r_2)$ 外切，與圓 $O_3(r_3)$ 內切。

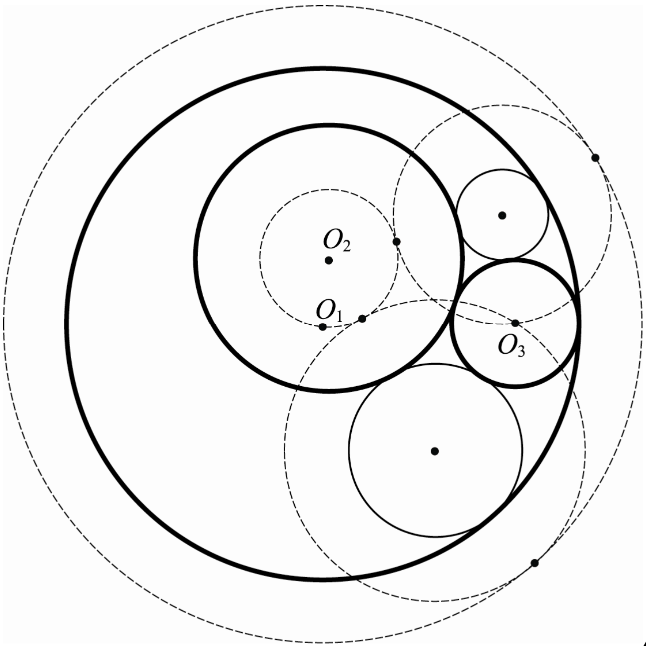
若圓 X 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點就是圓 $O_1(r_1)$， $O_3(r_3)$ 內切的切點，則當圓 X 被圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_2(r_2)$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有交點）；當圓 X 將圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_2(r_2)$， $O_3(r_3)$ 外切的切點 A_2 在圓 X 的內部（因爲此切點在圓 $O_3(r_3)$ 上）。於是，圓 $O_2(r_2)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），這與圓 X 、圓 $O_2(r_2)$ 外切的假設矛盾。

若圓 X 與圓 $O_3(r_3)$ 內切的切點不是圓 $O_1(r_1)$， $O_3(r_3)$ 內切的切點 A_1，則當圓 X 被圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_1(r_1)$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有

交點）；當圓 X 將圓 $O_3(r_3)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_1(r_1)$ ， $O_3(r_3)$ 內切的切點 A_1 在圓 X 的內部（因爲此切點在圓 $O_3(r_3)$ 上）。於是，圓 $O_1(r_1)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），也有些點在圓 X 的外部（因爲圓 X 不能將圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部），這與圓 X 、圓 $O_1(r_1)$ 相切的假設矛盾。由此可知：在此情形中，所求圓不能與圓 $O_1(r_1)$ 內切，與圓 $O_2(r_2)$ 外切，與圓 $O_3(r_3)$ 內切。

＊ 第四組：與圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 外切而與圓 $O_1(r_1)$ 內切的圓

作圖法與本小節「圓圓圓」問題第四種情形第四組圓的作圖法相同。



▲圖 78

《證明》

證明與本小節「圓圓圓」問題第四種情形第四組圓作圖法的證明相同。

六、 圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 是一對外切圓，又圓 $O_2(r_2)$ ， $O_3(r_3)$ 都與圓 $O_1(r_1)$ 內切，$r_1 > r_2$ 且 $r_1 > r_3$ ；又圓心 O_1 ， O_2 與 O_3 不共線。

《作圖法》

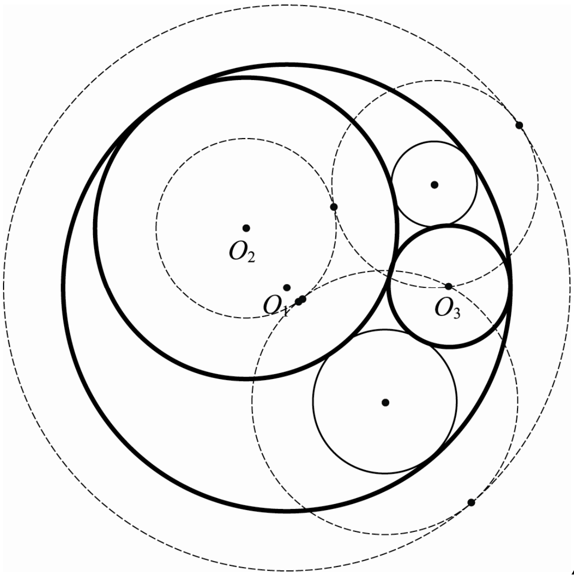
在此情形中，所求圓共有兩解（如圖 79 所示），此兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，與圓 $O_2(r_2)$ 都外切，與圓 $O_3(r_3)$ 都外切（第四組圓）。作圖法與本小節「圓圓圓」問題第四種情形第四組圓的作圖法相同。

此情形中爲什麼沒有第一、二、三組圓呢？其理由如下：設圓 X 與圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 與 $O_3(r_3)$ 都相切，而且設圓 X 與圓 $O_i(r_i)$ 內切，其中 $i = 2$ 或 3 。

若圓 X 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點就是圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點，則當圓 X 被圓 $O_i(r_i)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_{5-i}(r_{5-i})$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有交點）；當圓 X 將圓 $O_i(r_i)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_i(r_i)$ 與圓 $O_{5-i}(r_{5-i})$ 外切的切點在圓 X 的內部（因爲此切點在圓 $O_i(r_i)$ 上）。於是，圓 $O_{5-i}(r_{5-i})$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），也有些點在圓 X 的外部（圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_{5-i}(r_{5-i})$ 內切的切點就是一例），這與圓 X 、圓 $O_{5-i}(r_{5-i})$ 相切的假設矛盾。

其次，若圓 X 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點不是圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點，則當圓 X 被圓 $O_i(r_i)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 X 與圓 $O_1(r_1)$ 不會相切（事實上，此兩圓沒有交點）；當圓 X 將圓 $O_i(r_i)$ 包在其內部（切點除外）時，圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_i(r_i)$ 內切的切點在圓 X 的內部（因為此切點在圓 $O_i(r_i)$ 上）。於是，圓 $O_1(r_1)$ 上有些點在圓 X 的內部（此切點就是一例），也有些點在圓 X 的外部（因為圓 X 不能將圓 $O_1(r_1)$ 包在其內部），這與圓 X ，圓 $O_1(r_1)$ 相切的假設矛盾。

由此可知：在此情形中，所求圓都與圓 $O_2(r_2)$ 外切，也都與圓 $O_3(r_3)$ 外切。



▲圖 79

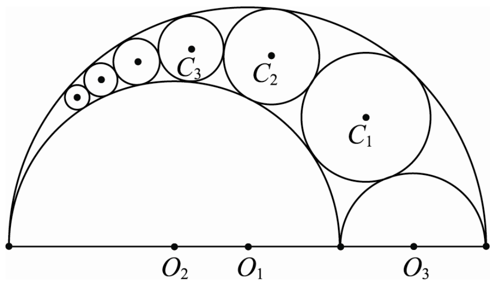
《證明》

證明與本小節「圓圓圓」問題第四種情形第四組圓作圖法的證明相同。

在「圓圓圓」問題中，根據三個給定圓的位置與大小來分類時，要考慮的情形非常多。由於篇幅所限，本文只選擇較具代表性的六種情形，有興趣的讀者可仿照本文所介紹的方法探討其他情形。本文的最後一段，我們舉出圓的幾何中兩個有名的例子。

應用例之一：鞋匠的小刀

在圖 80 中，圓 $O_2(r_2)$ 與圓 $O_3(r_3)$ 是一對外切圓，而圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 、圓 $O_3(r_3)$ 都內切，又圓心 O_1 ， O_2 與 O_3 共線且 $r_1 > r_2 > r_3$ 。將此三圓沿著圓心的連線 $O_1O_2O_3$ 擷取同一側的半圓所成的圖形中，三個半圓所圍的圖形就稱為鞋匠的小刀（shoemaker’s knife）。



▲圖 80

在鞋匠的小刀中，我們可以作出一序列的圓 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得：

(1)每個圓 C_n 都與圓 $O_1(r_1)$ 內切，且都與圓 $O_2(r_2)$ 外切。

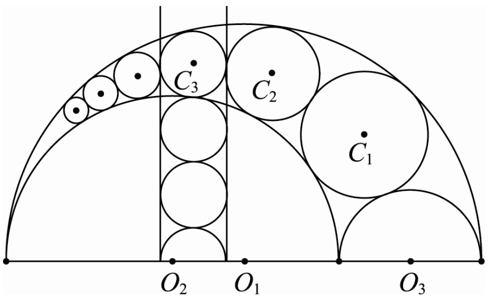
(2)圓 C_1 與圓 $O_3(r_3)$ 外切，而對每個正整數 n ，圓 C_{n+1} 與圓 C_n 外切。

至於上述圓$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$的作圖法，說明如下：當$n>1$時，採用「圓圓圓」問題第六種情形第四組圓的作圖法即可作出圓心C_n。但當$n=1$時，因為圓心O_1，O_2與O_3共線；所以，圓心C_1的作圖法就必須稍作修正，如何修正可參看「點圓圓」問題第十一種情形及思考問題 42 的說明。

在鞋匠的小刀問題中，關於圓C_n的半徑與圓心的位置，有一個有趣的性質，敘述如下：

若圓C_n的半徑為s_n，而圓心C_n至連心線$O_1O_2O_3$的距離為d_n，則$d_n=2n\times s_n$。

上述性質的證明，通常利用圓的反演變換（inversion）。以圓$O_1(r_1)$與$O_2(r_2)$內切的切點為圓心，此點至圓C_n的切線段長為半徑的圓作為反演圓（circle of inversion），圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$被反演成圓C_n的一對平行切線，圓$O_3(r_3)$與圓C_1、圓C_2至圓C_{n-1}都被反演成與前述平行切線都相切的圓，至於圓C_n則被反演成本身。於是，反演後的圖形是一對平行直線以及與此二平行線都相切的$n+1$個圓，而且在這$n+1$個圓中，相鄰的兩個圓都外切，如圖 81 所示。根據這個圖形，很容易就可證得$d_n=2n\times s_n$。



▲圖 81

應用例之二：Steiner 圓系

給定平面上一對內離圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$，其中圓$O_2(r_2)$位於圓$O_1(r_1)$的內部。若$\{C_k\}_{k=1}^{n}$是滿足下述四個條件的有限多個圓，則$\{C_k\}_{k=1}^{n}$稱為是與內離圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$相切的一組 Steiner 圓系（Steiner chain）：

(1)每個圓C_k都與圓$O_1(r_1)$內切，每個圓C_k又都與圓$O_2(r_2)$外切。

(2)對每個$k\in\mathbb{N},1\le k\le n-1$，圓$C_{k+1}$與圓$C_k$外切。

(3)圓C_n又與圓C_1外切。

(4)除了(2)與(3)所提的切點外，$\{C_k\}_{k=1}^{n}$中的任何兩圓都沒有其他交點。

顯然地，每一組 Steiner 圓系中至少含三個圓。

關於 Steiner 圓系，首先要注意到一個現象，那就是：並不是每一對內離圓間都有與它們相切的 Steiner 圓系。事實上，即使是一對同心圓，都不一定有與它們相切的 Steiner 圓系。下面的思考問題給出了同心圓有與它們相切的 Steiner 圓系的條件。

思考問題 45：

若圓$O(r_1)$，$O(r_2)$是一對同心圓，且$r_1>r_2$；則此兩圓間有一組與它們相切且共含n個圓（$n\ge 3$）的 Steiner 圓系的充要條件是：兩半徑r_1,r_2與圓的個數n滿足下述關係式：

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}\text{或}\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)=2\text{。}$$

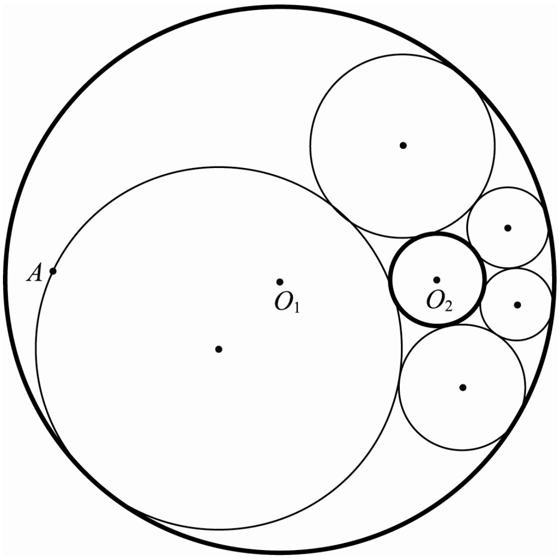
根據上述條件，可知：當兩同心圓$O(r_1)$，$O(r_2)$滿足$r_1=9r_2$時，此兩同心圓間沒有與它們相切的 Steiner 圓系。因為$\sin\frac{\pi}{4}<\frac{8}{10}<\sin\frac{\pi}{3}$，所以滿足$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{8}{10}$的$n$不是正整數。

至於一般的內離圓間有與它們相切的 Steiner 圓系的條件如下：兩內離圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$間有一組與它們相切且共含n個圓的 Steiner 圓系的充要條件是：存在兩同心圓$O(s_1)$，$O(s_2)$，使得同心圓$O(s_1)$，$O(s_2)$間有一組與它們相切且共含n個圓的 Steiner 圓系，而且內離圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$是同心圓$O(s_1)$，$O(s_2)$對某個反演變換（inversion）的反演像。當此充要條件成立時，內離圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$間的每一組與它們相切且共含n個圓的 Steiner 圓系，都是同心圓$O(s_1)$，$O(s_2)$間的某一組與它們相切且共含n個圓的 Steiner 圓系，對前述同一個反演變換的反演像。

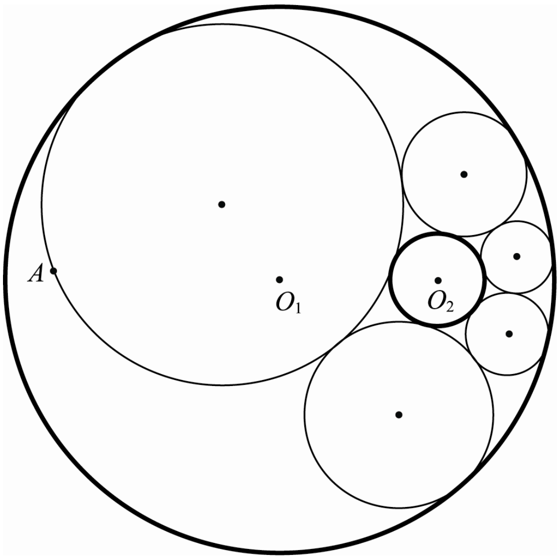
若兩內離圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$間有一組與它們相切且共含n個圓的 Steiner 圓系，且$r_1 > r_2$，則過在圓$O_1(r_1)$內部且在圓$O_2(r_2)$外部的每一點A，都可作出兩組與它們相切的 Steiner 圓系，而且所作出的 Steiner 圓系也都恰含n個圓。這兩組 Steiner 圓系的作圖法如下：

(1) 設圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$是同心圓，即$O_1 = O_2$。首先，在圓$O_1(\frac{r_1+r_2}{2})$上作出與點A距離爲$\frac{r_1-r_2}{2}$的點。因爲$\overline{O_1A} < \frac{r_1+r_2}{2}+\frac{r_1-r_2}{2}$，所以此種點共兩點。以此種點爲圓心，$\frac{r_1-r_2}{2}$爲半徑的圓就是圓$C_1$。以點$O_1$爲旋轉中心，將圓$C_1$旋轉$\frac{2\pi}{n}$即得出圓$C_2$。仿此繼續進行，就可完成整個 Steiner 圓系。

(2) 設圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$不是同心圓。首先，仿照「點圓圓」問題第十種情形第二組圓的作圖法，作出過點A且與圓$O_1(r_1)$內切且與圓$O_2(r_2)$外切的圓C_1。依思考問題 41 的結果，此種圓共兩個。其次，仿照上述「圓圓圓」問題第五種情形第四組圓的作圖法，作出與圓$O_1(r_1)$內切且與圓$O_2(r_2)$、圓C_1都外切的圓；依「圓圓圓」問題第五種情形第四組圓作圖法的結果，此種圓共兩個，其一是圓C_2、另一是圓C_n；再其次，仍仿照上述「圓圓圓」問題第五種情形第四組圓的作圖法，作出與圓$O_1(r_1)$內切且與圓$O_2(r_2)$、圓C_2都外切的圓；依「圓圓圓」問題第五種情形第四組圓作圖法的結果，此種圓共兩個，其一是圓C_3、另一是圓C_1。仿此繼續進行，就可完成整個 Steiner 圓系。



▲圖 82



▲圖 83

參考資料：

1. Cajori, Florian. A History of Mathematics. P.41
2. Eves, Howard. An Introductuon to the History of Mathematics. P.156

新北市100學年度市立高中職數學科競賽試題

填充題（共有六題，除第一題 5 分外，其餘每題都是 7 分，總計 40 分）

1. 根據研究：一個 n 階標準魔術方塊必須滿足不等式

$$\frac{1}{n}\times\frac{n-2}{2}\times\sqrt{2}<0.5$$

才能有好的旋轉功能。問：n 階標準魔術方塊應滿足 $n<$ ＿＿＿＿＿＿。

2. 英國哥倫比亞大學物理學家懷特海德製作了一組骨牌，第一張重 1 公克最輕，以後每張重量擴大爲前一張的 1.5 倍，把這套骨牌按適當間距排好，輕輕推倒第一張，必然會波及到下一張及推倒以後的骨牌。根據萬有引力定律測得：地球質量爲 5.976×10^{27} 公克，試問：懷特海德所排的骨牌中，第＿＿＿＿＿＿張的重量會比地球還重。（參考數據：$\log 5.976=0.7764$）

3. 尤拉在 1742 年時，將白努利所舉的四次多項式 $f(x)$ 分解爲二次多項式

$$x^2-\left(2+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1+\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right),$$

與二次多項式

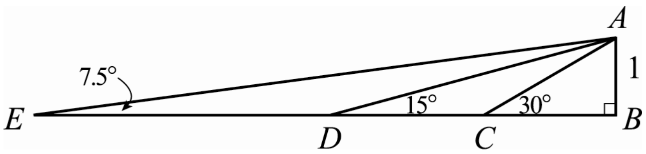
$$x^2-\left(2-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+\left(1-\sqrt{4+2\sqrt{7}}+\sqrt{7}\right)$$

的乘積。白努利所舉的多項式 $f(x)=$ ＿＿＿＿＿＿。（以降次排列表示）

4. 候選人在一條重要的馬路上插競選旗子，第一天在該馬路的頭尾各插一面旗子，第二天在兩面旗子中間再插兩面旗子，第三天在相鄰兩面旗子中間各再插兩面旗子，…，依此類推，每一天都在既有相鄰兩面旗子中間各再插兩面旗子。問：第 n 天後，該馬路上一共插＿＿＿＿＿＿面該候選人的旗子。

5. 甲班有 20 位男生、15 位女生，需推派三位同學參加某項全校性活動，班會中大家決定用抽籤的方式產生參加人選。若每個人中籤的機率相等，則推派的三位同學中有男也有女的機率爲＿＿＿＿＿＿。

6. 利用下圖，求 $\cot 7.5°=$ ＿＿＿＿＿＿。



參考答案

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$4+2\sqrt{2}$	159	$x^4-4x^3+2x^2+4x+4$	$1+3^{n-1}$	$\frac{90}{119}$	$2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

計算證明題（共有四題，總計 50 分）

1. 將由左至右的六個位置分別填入 0 或 1 或 2 的數字，成爲「三元字串」，例如：201021 是一個三元字串。對於兩個三元字串 $a = a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ 與 $b = b_1b_2b_3b_4b_5b_6$ ，定義 a 與 b 的距離爲滿足 $a_i \neq b_i$ 的下標 i 的個數。例如：201021 與 001011 的距離爲 2（因爲它們的第一及第五個位置的數字不相同）。

   (1) 試問與 201021 的距離爲 3 的三元字串共有多少個？

   (2) 試求所有三元字串與 201021 的距離總和。（14 分）

2. 小芸和小晉玩擲骰子遊戲，兩人從特製的三顆骰子中各選一個，然後各自擲骰子一次，點數高的獲勝。三顆骰子各面的點數如下：

   A：四面 2 點，兩面 6 點。

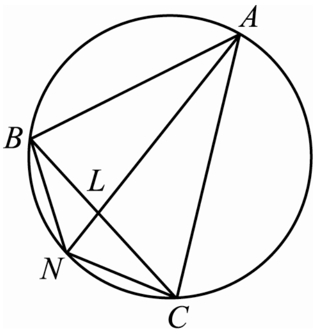
   B：三面 1 點，三面 5 點。

   C：六面都是 3 點。

   (1) 假設小晉先選 A 骰子，小芸要選哪個骰子贏的機會較大？

   (2) 許多兩人玩的遊戲都是先開始的人占些優勢，請問：在這個遊戲中，先選的人有占優勢嗎？（須詳述理由）（12 分）

3. 在銳角△ ABC 中，$\angle A$ 的角平分線交 BC 於 L，交△ ABC 的外接圓於 N 。自點 L 向 AB 、AC 引垂直線，垂足分別爲 K 與 M ：



   (1) 請找出與△ ALC 相似的其他三角形。

   (2) 證明：四邊形 $AKNM$ 與△ ABC 面積相等。（12 分）

4. 已知 a 、b 爲整數，且滿足 $a+b$ 是 3 的倍數，證明

$$a^3 + b^3$$

   是 9 的倍數。（12 分）

參考解答

1. 所謂三元字串就是從 $0,1,2$ 三類數字裡取出六個，並排成一列的方法數：

 (1) 與 201021 的距離爲 3 的三元字串就是僅能改變六個位置中的三個，而且每個改變的位置只能填入其餘的兩個數字，因此一共有

$$C_3^6 \times 2^3 = 160$$

 個。

 (2) 從(1)的討論中，可以發現：與 201021 的距離爲 k （$k = 0,1,2,3,4,5,6$）的三元字串共有

$$C_k^6 \times 2^k$$

 個。因此，所有三元字串與 201021 的距離總和爲

$$\sum_{k=0}^{6}\left(C_k^6 \times 2^k\right)\times k = C_1^6 \cdot 2^1 \cdot 1 + C_2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 + \cdots + C_6^6 \cdot 2^6 \cdot 6$$

$$= 12 + 120 + 480 + 960 + 960 + 384 = 2916 .$$

 [另解] 最後的級數和也可以計算如下：

$$\sum_{k=0}^{6}\left(C_k^6 \times 2^k\right)\times k = \sum_{k=1}^{6}\left(6\times 2C_{k-1}^5 \times 2^{k-1}\right) = 12\left(1+2\right)^5 = 2916 \ .$$

 [妙解] 計算所有三元字串與 201021 的個別位置的距離總和；例如，在所有三元字串中與 201021 的第一個位置不同的字串一共有

$$2\times 3^5 = 486$$

 個。同理，其餘位置不同的字串也都有 486 個。故所有三元字串與 201021 的個別位置的距離總和爲

$$486\times 6 = 2916 \ .$$

 這也是所有三元字串與 201021 的距離總和。

2. 首先計算

 1º 當一人擲 A 骰子，另一人擲 B 骰子時，擲 A 骰子者獲勝的機率爲

$$\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3} \ .$$

 2º 當一人擲 A 骰子，另一人擲 C 骰子時，擲 C 骰子者獲勝的機率爲

$$\frac{6}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3} \ .$$

 3º 當一人擲 B 骰子，另一人擲 C 骰子時，擲 B 骰子者獲勝的機率爲

$$\frac{3}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2} \ .$$

 其次，根據上述計算回答所問的問題如下：

 (1) 當小晉先選 A 骰子，小芸選 C 骰子贏的機會較大，爲 $\frac{2}{3}$ 。

(2) 沒有占優勢（甚至吃虧），原因是

①當先玩者選 A 骰子時，後玩者可以選 C 骰子，此時後玩者勝的機率比較高，爲 $\frac{2}{3}$（如上小題的例子或是 2^{o} 的情況）。

②當先玩者選 B 骰子時，後玩者可以選 A 骰子，此時後玩者勝的機率比較高，爲 $\frac{2}{3}$（如(1)的情況）。

③當先玩者選 C 骰子時，後玩者可以選 B 骰子，此時先玩者與後玩者勝的機率都是 $\frac{1}{2}$（如 3^{o} 的情況）。

3. (1) 因爲 $\angle LAC = \angle BAN$（ AL 爲分角線）及

$\angle ALC = \angle BAN + \angle ABC = \angle CAN + \angle ABC = \angle CBN + \angle CAN = \angle ABN$ ，

所以△ ABN 與△ ALC 相似。同理，△ BLN 也與△ ALC 相似。

(2) 利用(1)的相似，得到

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{c}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AN}}{b},$$

即

$$\overline{AL} \times \overline{AN} = bc \ .$$

四邊形 $AKNM$ 的面積等於△ AKN 與△ AMN 的面積和，又因爲

$$\begin{aligned}\Delta AKN &= \frac{1}{2}\overline{AK} \times \overline{AN} \sin\frac{\angle A}{2} \\ &= \frac{1}{2}\overline{AL}\cos\frac{\angle A}{2} \times \overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2} \\ &= \frac{1}{2}\overline{AL} \times \overline{AN} \sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2},\end{aligned}$$

及同理可得

$$\Delta AMN = \frac{1}{2}\overline{AL} \times \overline{AN} \sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2},$$

所以四邊形 $AKNM$ 的面積爲

$$\frac{1}{2}\overline{AL} \times \overline{AN}\left(2\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}\right) = \frac{1}{2}\overline{AL} \times \overline{AN} \sin\angle A \ .$$

將 $\overline{AL} \times \overline{AN}$ 以 bc 取代，得到

$$\frac{1}{2}bc\sin\angle A,$$

這也是△ ABC 的面積。故四邊形 $AKNM$ 與△ ABC 的面積相等。

4. 由因式分解

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right),$$

及 $a+b$ 為 3 的倍數知道

$$(a+b)\text{ 與 }\left((a+b)^2-3ab\right)$$

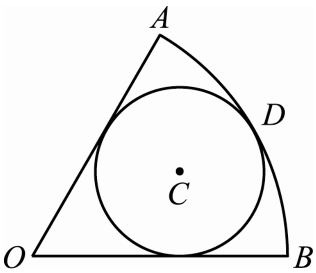
都是 3 的倍數，即

$$a^3+b^3$$

是 9 的倍數。

口試試題（共有兩題，總計 10 分）

1. 如下圖



一圓心角 60° 扇形 OAB，半徑為 R，其內切圓的半徑為 r。求 $\frac{r}{R}$ 的值。

2. 將一個半徑為 5 公分的鐵球，放入一個邊長 10 公分的正方體容器，再放入另一個小鉛球，然後蓋上正方體容器的蓋子，使蓋子與正方體完全密合。求小鉛球的最大半徑。

參考答案

1.	2.
$\frac{1}{3}$	$5\left(2-\sqrt{3}\right)$

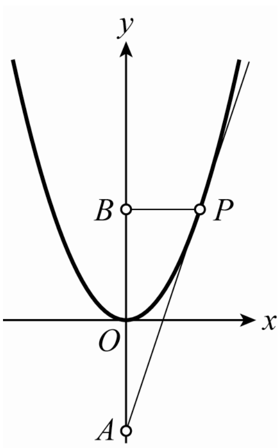
專欄 動手玩數學

許志農／臺灣師範大學數學系

遊戲 65

☆☆☆☆☆

設 P 在拋物線 $y=x^2$ 上，且在第一象限內的任意一點，如圖所示，直線 PB 與 x 軸平行，且交 y 軸於 B 點；直線 PA 是拋物線過 P 點的切線，且交 y 軸於 A 點：



證明：拋物線、直線 PB 與 y 軸所圍的區域面積與△ PAB 的面積之比值是一個常數。

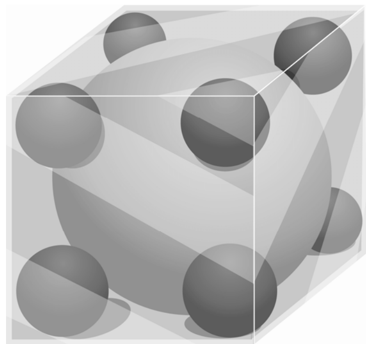
〔玩鎖・玩索〕

「拋物線、直線 PB 與 y 軸所圍的區域面積」是微積分可以計算出來的，使用多項式的微積分可以知道這個常數爲何？

遊戲 66

☆☆☆☆☆

一模型公司在一個內部邊長爲 2 單位的透明正立方體箱子內，放置一顆半徑爲 1 單位的黃球，然後又要在箱子的八個角落再塞入 8 顆半徑相同的小紅球。



試求：小紅球的最大半徑爲多少單位？

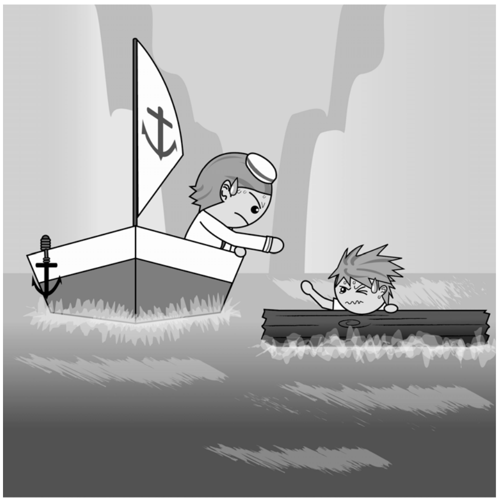
〔玩鎖・玩索〕

這是九十六學年度國立臺灣大學物理系大學申請數學試題，這是一種常見的題目。如果將正立方體改爲邊長是1的正四面體，放置一顆大球與正四面體的四面相切，然後在四個頂點附近放置四顆半徑相同的小球，那麼大球的半徑與小球的最大半徑分別是多少呢？

遊戲 67

☆☆☆

有一個小孩掉到河裡，他抱住一根圓木順水向下漂流。有三條船同時與圓木相遇，但都沒有注意到圓木上有小孩。當三條船離開圓木一小時後，船員們同時從收音機中聽到圓木上有小孩要求營救的消息。此時，三條船都馬上掉頭返回去追圓木。



若三條船的速度是固定的，而且都不相同，則哪艘船救起了圓木上的小孩呢？

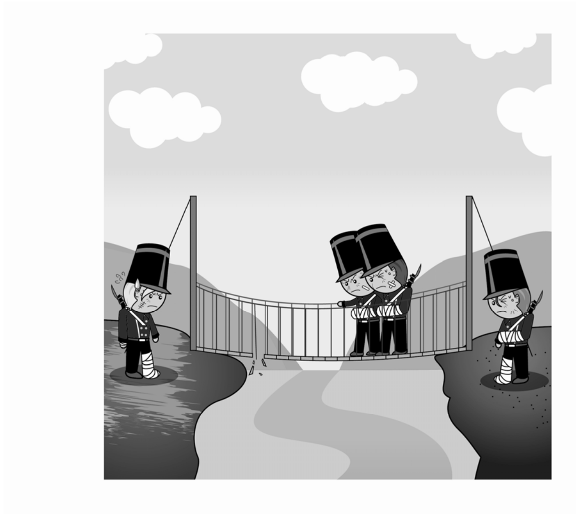
〔玩鎖・玩索〕

摘自美國《數學教師》，1987(8)。

遊戲 68

☆☆☆☆☆

某晚有四個傷兵需要渡過一條破橋以逃離敵方砲火，該破橋每次最多只能承載兩個士兵，而且當兩個士兵一起過橋時，他們必須以較慢的士兵的速度行走。



該四個士兵只有一支手電筒，他們每次必須攜帶手電筒才能安全的過橋，如果四個士兵各需1，2，4及6分鐘過橋，那麼他們安全過橋的最短時間是幾分鐘？

〔玩鎖・玩索〕

顯然必須三去兩回才有辦法讓四位傷兵過橋，而每次都是兩人過去，一人再拿手電筒回來。問題的關鍵在 6 分鐘的傷兵與誰過橋，與 1 或 2 分鐘的傷兵過橋，跟與 4 分鐘的傷兵過橋的差別何在呢？這就是這道問題有趣的地方。本問題是香港青少年數學菁英選拔賽的試題。

動手玩數學~破解秘笈 第16期

遊戲 61

(1) 因爲 $\angle LAC=\angle BAN$（$\overline{AL}$ 爲分角線）及

$$\begin{aligned}\angle ALC&=\angle BAN+\angle ABC=\angle CAN+\angle ABC\\&=\angle CBN+\angle CAN=\angle ABN,\end{aligned}$$

所以△ABN 與△ALC 相似。

同理，△BLN 也與△ALC 相似。

(2) 利用(1)的相似，得到

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}\Rightarrow\frac{c}{\overline{AL}}=\frac{\overline{AN}}{b},$$

即

$$\overline{AL}\times\overline{AN}=bc\ .$$

四邊形 $AKNM$ 的面積等於△AKN 與△AMN 的面積和，又因爲

$$\begin{aligned}\Delta AKN&=\frac{1}{2}\overline{AK}\times\overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}\\&=\frac{1}{2}\overline{AL}\cos\frac{\angle A}{2}\times\overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}\\&=\frac{1}{2}\overline{AL}\times\overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2},\end{aligned}$$

及同理可得

$$\Delta AMN=\frac{1}{2}\overline{AL}\times\overline{AN}\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2},$$

所以四邊形 $AKNM$ 的面積爲

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\overline{AL}\times\overline{AN}\left(2\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\overline{AL}\times\overline{AN}\sin\angle A.\end{aligned}$$

將 $\overline{AL}\times\overline{AN}$ 以 bc 取代，得到

$$\frac{1}{2}bc\sin\angle A,$$

這也是△ABC 的面積。故四邊形 $AKNM$ 與△ABC 的面積相等。

遊戲 62

首先計算

①當一人擲 A 骰子，另一人擲 B 骰子時，擲 A 骰子者獲勝的機率爲

$$\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}\ .$$

②當一人擲 A 骰子，另一人擲 C 骰子時，擲 C 骰子者獲勝的機率爲

$$\frac{6}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}\ .$$

③當一人擲 B 骰子，另一人擲 C 骰子時，擲 B 骰子者獲勝的機率爲

$$\frac{3}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}\ .$$

其次，根據上述計算回答所問的問題如下：

(1) 當小晉先選 A 骰子，小芸選 C 骰子贏的機會較大，爲 $\frac{2}{3}$。

(2) 沒有佔優勢（甚至吃虧），原因是

1°當先玩者選 A 骰子時，後玩者可以選 C 骰子，此時後玩者勝的機率比較高，爲 $\frac{2}{3}$（如上小題的例子或是②的情況）。

2°當先玩者選 B 骰子時，後玩者可以選 A 骰子，此時後玩者勝的機率比較高，爲 $\frac{2}{3}$（如①的情況）。

3°當先玩者選 C 骰子時，後玩者可以選 B 骰子，此時先玩者與後玩者勝的機率都是 $\frac{1}{2}$（如③的情況）。

遊戲 63

設河寬 x 公尺，較快的船爲甲船，另一艘爲乙船，依題意在第一次相遇時，甲船航行了 $x-720$ 公尺，而乙船走了720公尺；又第一次相遇至第二次相遇，

甲船航行了 $720+(x-400)=x+320$ 公尺，

而乙船走了 $(x-720)+400=x-320$ 公尺。

因此

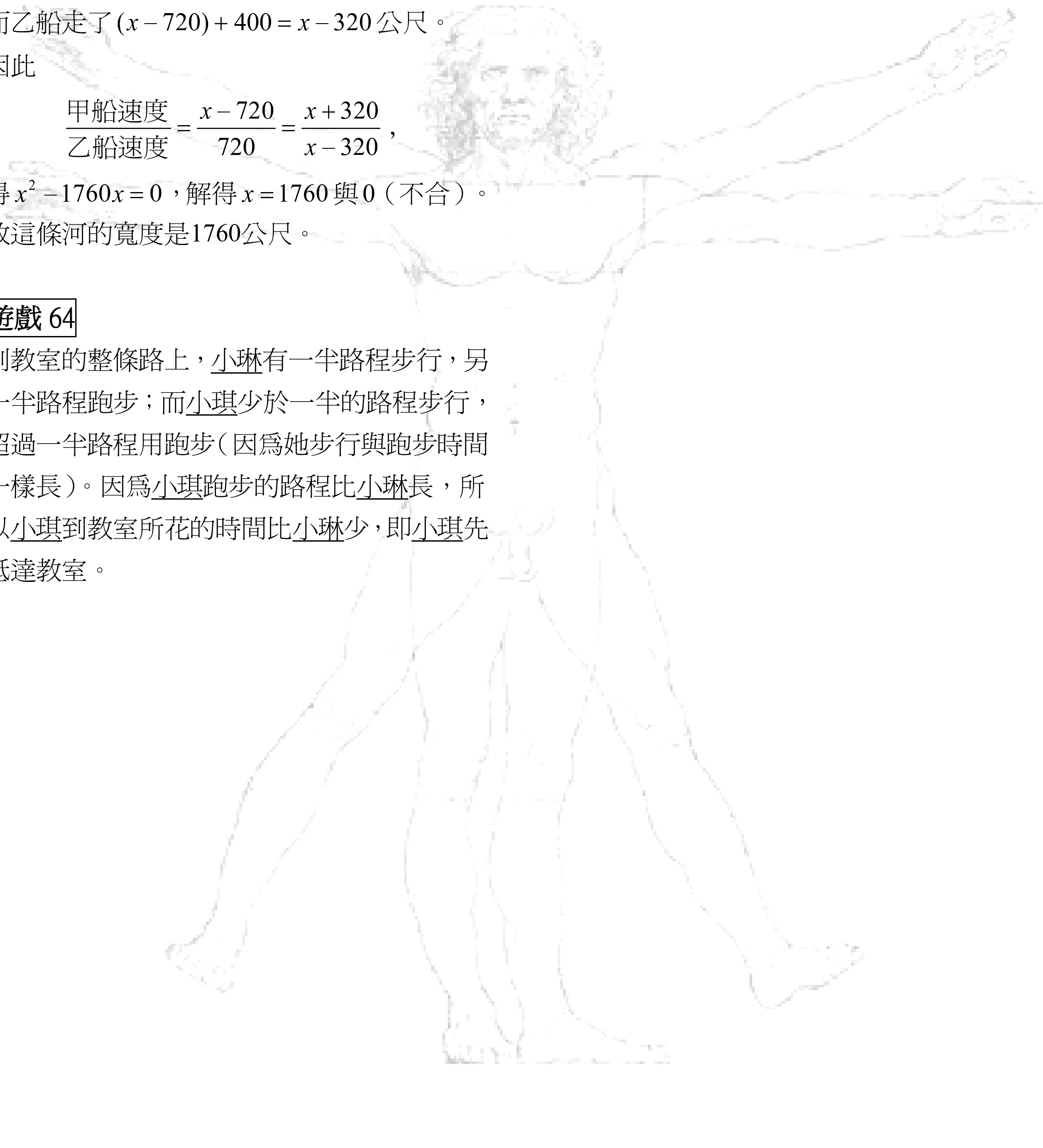
$$\frac{\text{甲船速度}}{\text{乙船速度}}=\frac{x-720}{720}=\frac{x+320}{x-320},$$

得 $x^2-1760x=0$，解得 $x=1760$ 與 0（不合）。

故這條河的寬度是1760公尺。

遊戲 64

到教室的整條路上，小琳有一半路程步行，另一半路程跑步；而小琪少於一半的路程步行，超過一半路程用跑步（因爲她步行與跑步時間一樣長）。因爲小琪跑步的路程比小琳長，所以小琪到教室所花的時間比小琳少，即小琪先抵達教室。



龍騰數亦優

讀者意見調查表

一、 對《龍騰數亦優》各篇文章，您到目前爲止的閱讀狀態如何？各篇文章的參考價值如何？

參考價值 有	參考價值 無	篇名	閱讀狀況有 全部讀完	重要部份讀完	略翻	完全沒讀
☐	☐	1. 戲說數學 序	☐	☐	☐	☐
☐	☐	2. 一道 TRML 試題的解析	☐	☐	☐	☐
☐	☐	3. 一題多解數學思考的呈現	☐	☐	☐	☐
☐	☐	4. 鴿籠原理	☐	☐	☐	☐
☐	☐	5. Apollonius 問題(五)	☐	☐	☐	☐
☐	☐	6. 新北市 100 學年度縣立高中職數學科競賽試題	☐	☐	☐	☐
☐	☐	7.動手玩數學	☐	☐	☐	☐
☐	☐	8.第 16 期動手玩數學破解秘笈	☐	☐	☐	☐

整體而言，以上文章您最喜歡哪一篇？編號：________________

爲什麼？________________________________

二、 內容實用度

您認爲《龍騰數亦優》最實用的三篇文章是：

(1)________________

(2)________________

(3)________________

您認爲《龍騰數亦優》內可有可無的三篇文章是：

(1)________________

(2)________________

(3)________________

理由爲：________________

三、 對本期《龍騰數亦優》的意見

1. 題材的選擇
   ☐ 恰到好處 ☐ 普通 ☐ 不符需求
2. 內容的深度
   ☐ 艱澀難懂 ☐ 普通 ☐ 過於淺顯
3. 實用的效果
   ☐ 效果佳 ☐ 普通 ☐ 效果不佳
4. 標題前言
   ☐ 吸引人 ☐ 普通 ☐ 不吸引人
5. 照片插畫
   ☐ 清晰簡明 ☐ 普通 ☐ 複雜模糊
6. 整體呈現方式
   ☐ 美觀大方 ☐ 普通 ☐ 不利閱讀

您對本書之整體意見：________________

五、個人資料

姓名：____________ 電話：(O)____________ (H)____________

任教學校：____________ 任教年級：____________ 任教科目：____________

地址：☐☐☐________________________

E-mail：________________________

龍騰數亦優

親愛的讀者，您好：

感謝您對《龍騰數亦優》的支持，秉持著不斷精益求精的一貫信念，我們特別設計了這份問卷，希望藉由讀者的看法及意見，幫助我們更加精進。

謝謝您耐心填寫此信問卷，再次感謝您對我們的支持與愛護！

敬祝

教 學 愉 快

《龍騰數亦優》期刊　敬上

請自行黏貼後直接投郵

廣 告 回 信

台灣北區郵政管理局登記證

北台字第 3032 號

免貼郵票・限時專送

248

新北市五股區五權七路 1 號

龍騰數亦優　期刊編輯室收