龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第15刊

龍騰文化

編輯室墨記

生活中當遇到困擾的問題時，有可能跑去向神父告解，神父可透過《聖經》的故事或教條來指點迷津；但當真實世界的情境問題轉換成數學問題而遇到難題時，歐幾里德症候群的患者求救於《原本》這本書，透過書中的公設、引理或定理，推演出數學答案，再將答案詮釋回真實世界。而愈能將各種真實世界的情境問題轉換成數學問題的人，其數學素養愈好。一位好的數學老師必能鑑賞好的數學試題，也能設計好的數學試題，並隨著時間的成長、經驗的累積，即可利用這些試題來評量學生的數學素養高低。學生能力國際評量計畫的重點在評估完成基礎教育的學生，其內容涵蓋閱讀、數學和科學三個領域的素養程度；數學素養所關注的是學生應用習得的數學能力去面對未來挑戰的能力。本期中提供七題試題，可以試著讓學生挑戰一下數學素養能力。

二次方程式求解時有公式可求得其解，那三次方程式是否也有公式可以求解呢？葉善雲老師於本期中提供您三次方程式根的公式。精采可期，您絕對不能錯過！

上期中，李維昌老師利用「直線參數式與克拉瑪公式」求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標，本期中，老師介紹另一種解法：利用「外積與三階行列式的概念」來求解。您可以試著比較其不同處，或許您可從其中再發現另一套新的解法。

接續之前變化多元的圓，繼續讓趙文敏教授帶領我們來探索圓的世界吧！

在車禍現場，根據可靠消息指出，三個涉及此事件駕駛人所做的筆錄中明顯有人說謊，你可以推測出誰才是真正的肇事者嗎？邏輯推理沒有一定的解法找出答案，試著用您自己的方法推演，培養數學邏輯素養能力。

發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
副總編輯：陳美吟
執行編輯：莊莉錚
美術編輯：彭文君

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五權七路1號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2299-5311
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2011/05/15
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2011.05 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

PISA 數學素養評量試題

許志農／臺灣師大數學系

話說兩千三百多年前，一位希臘人生了一種疾病，這位希臘人替自己找到了治療這種疾病的藥方：他寫了一套書，只要日夜閱讀這套書，就可以緩解病情。後來，全世界得這種疾病的人愈來愈多，像清朝的康熙皇帝㊟，美國第十六任總統林肯㊟與第二十任總統加菲爾德㊟，他們都得過這種疾病；也因爲得此疾病的人快速增加，這位希臘人所寫的這套書曾經是世上流傳最廣的書籍。再稍把時間拉近至兩千年前，一位巴勒斯坦人生了另一種疾病，治療這種疾病的方法也是要閱讀書籍，只是需要閱讀另一套書籍。罹患這種疾病的人數遠超過得了前述疾病的人口，這套書後來居上，成爲全世界最暢銷的書籍。

究竟是哪兩套書有這麼神奇的療效呢？

答案是《原本》與《聖經》;《原本》是歐幾里德筆耕的書籍，而《聖經》則是神透過耶穌的啟示書。《原本》從五大公設出發，將真實世界與數學世界作區別；而前後寫作年代超越兩千年，作者四十餘位的《聖經》則是將真實世界與神的世界作區隔：

⊙當碰到理性問題時，將真實世界的情境問題轉換成數學問題，並求救於《原本》，透過《原本》的公設、引理或定理，推演出數學答案，再將這答案詮釋回真實世界的相應結果，這是歐幾里德症候群患者最拿手的把戲。

⊙當遇到感性問題時，將真實世界的困擾跑去向神父告解，神父透過《聖經》的故事或教條對你指點迷津，再將這迷津落實於真實世界裡，這是耶穌症候群患者的專長。

顯然地，愈能讓各種問題在真實世界與數學世界轉換的人就是數學素養愈好的人；同樣的，愈能善用靈性世界的知識，幫忙普羅大眾解決生活中的各種困擾者，就是宗教素養愈好的人。

在工業發達、科技進步與文化昌明的今日，讓自己罹患歐幾里德症候群成爲一種顯學，就算你不想生這種病，教育當局也會硬性的強迫你生這種疾病，原因是：世界各國都把數學課程列爲國民義務教育的重要必修課程。數學老師除了努力讓每個學生罹患歐幾里德症候群外，還要出數學試題來評量學生患病的輕重，分數愈高者代表病入膏肓，分數愈低者表示還沒生病，是健康的人。既然試題是爲了診斷患病的輕重，一道或一份好的數學試題就必須滿足以下兩項指標：

(1) 經得起統計學上的考驗：

答對率要適當，鑑別度要合理，鐘形曲線的雛形要出現。這些考驗只需輸入電腦，馬上可知結果，也就是說，這項指標是比較容易判定的，而且是客觀的。

(2) 能評量數學素養的高低：

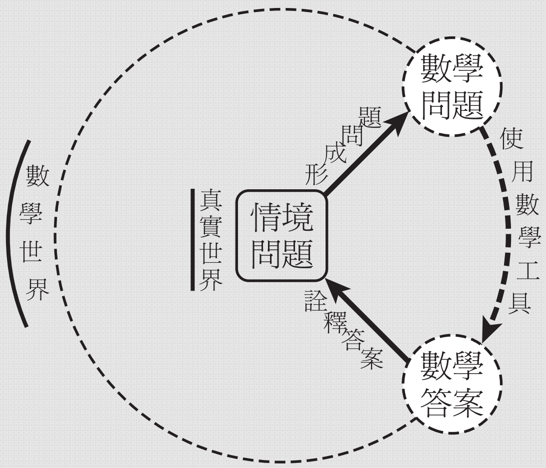
關於「數學試題是否能評量數學素養的高低」，是比較主觀的指標，很難每位老師或專家的看法一致，就如同棒球比賽中，裁判對好、壞球的認定有時也會有所不同。但是，

一位好的數學老師除了必須能鑑賞好的數學試題（如同當個合格的裁判）外，最好也要能設計好的數學試題（如同當個好投手）。雖然這項指標是主觀的，但是隨著時間的成長、命題經驗的累積、良好觀念的建立，是有機會往客觀的方向大步移動的。

數學老師都是歐幾里德症候群的患者，對於真實世界與數學世界之間的轉換要有相當的熟析度，同時也要能設計出優異的數學試題，利用這些試題來評量學生素養的高低。PISA 就是想透過這些優秀老師所設計出來的優良題目，來評量學生數學素養的高低。

學生能力國際評量計劃（簡稱 PISA）的重點在評估接近完成基礎教育的十五歲學生，對於未來生活可能面對的問題情境，準備的程度以及他們習得多少必備的知識和技能。PISA 評量內容涵蓋閱讀、數學和科學三個領域的素養程度。關於數學素養層面，主要評量四大概念：數量、空間與形狀、改變與關係、不確定性，而題材融入了現在國民都會碰到的全球暖化、溫室效應、人口成長、浮油與海洋、酸雨或運動常識等課題，生活化的課題都是可涵蓋的範圍。

數學素養的評量可以用下圖來說明：



數學素養所關注的是學生應用習得的數學能力去面對未來挑戰的能力。這些能力包括分析、推理以及有效的溝通概念，測驗學生是否能透過形式、公式解決不同領域與情境的數學問題。這數學素養可根據學生解題的過程細分成如下三種：

① 將情境問題轉化成數學問題（形成數學問題）。

② 使用數學概念、事實與推理解題（使用數學工具）。

③ 詮釋、應用及評估所得的數學答案（詮釋數學答案）。

註傳教士白晉與張誠曾教康熙皇帝《幾何原本》。

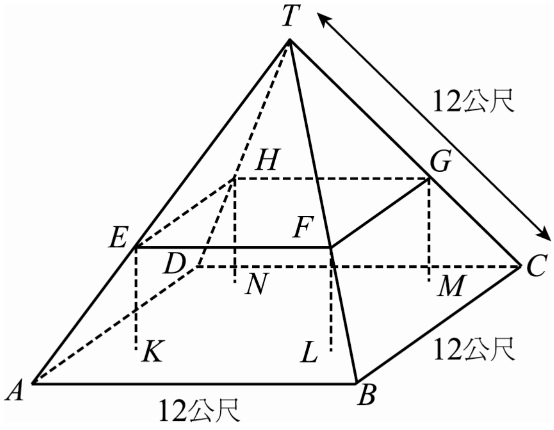
註林肯在《簡短的自傳》裡說的話：「自從他當了議會議員之後，他學習並掌握了歐幾里德的六卷書。他開始專心立志地進行嚴格的腦力訓練，以提高他的才能，特別是他的邏輯和語文能力。由於他喜歡歐幾里德的書，他在巡行時總帶著它們，經常在枕邊放一小蠟燭，學習到深夜，直到他能容易地證明六卷書中的所有命題，而於此時，一間屋子裡有半打他的律師夥伴們，沒完沒了的鼾聲充斥房間。」

註加菲爾德利用梯形面積和三角形面積的關係，簡潔地證明了勾股定理。

1 農場

下圖是一張有三角形屋頂的農場照片：

又下面是一位學生依據這個農場的屋頂做進一步測量結果所畫的數學模型：



在這個屋頂模型中，地板 $ABCD$ 是一個正方形，支撐屋頂的橫樑是長方體 $EFGH-KLMN$ 的邊，而 E 是 $\overline{AT}$ 的中點，F 是 $\overline{BT}$ 的中點，G 是 $\overline{CT}$ 的中點，且 H 是 $\overline{DT}$ 的中點。

若四角錐 $T-ABCD$ 的所有邊之長度都是 12 公尺，則

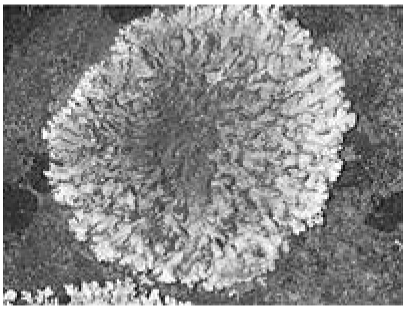
(1) 計算屋頂地板 $ABCD$ 的面積：屋頂地板 $ABCD=$__________平方公尺。

(2) 計算長方體 $EFGH-KLMN$ 的邊 $\overline{EF}$ 之長度：$\overline{EF}$ 的長度爲__________公尺。

(3) 計算屋頂最高點 T 的高度：屋頂最高點 T 與地板的距離爲__________公尺。

2 地衣

全球性暖化會造成一部分冰川融化的結果。約在冰川消失的十二年後，微小的植物—地衣，會開始在岩石間生長。地衣生長的形式有如圓圈一般：



圓圈的直徑與地衣的年齡之間關係約可用下列的公式來表示：

$$d = 7.0 \times \sqrt{t-12},\ t \geq 12\ ,$$

這裡的圓圈直徑 d 是以公釐爲單位，而 t 表示冰川消失後的年數。

(1) 利用公式，算出冰川消失後 16 年的地衣直徑，並寫出你的計算方法。

(2) <u>安安</u>測量出某地區地衣的直徑爲 35 公釐。請問在這地區的冰川是多少年前消失？並寫出你的計算方法。

3 三角形

圈選出符合下列敘述的三角形：

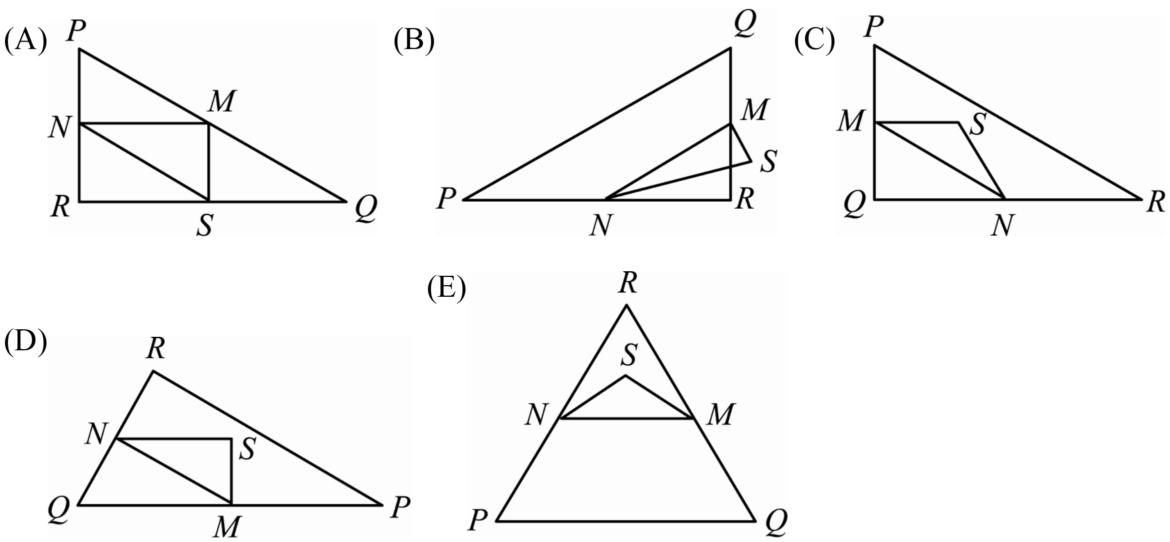
三角形 PQR 是一個直角三角形，且 R 爲直角。

線段 RQ 比線段 RP 短。

點 M 爲線段 PQ 的中點，且點 N 爲線段 RQ 的中點。

點 S 是三角形內部的一個點。

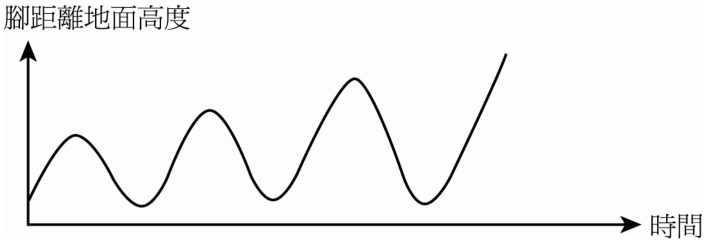
線段 MN 比線段 MS 長。

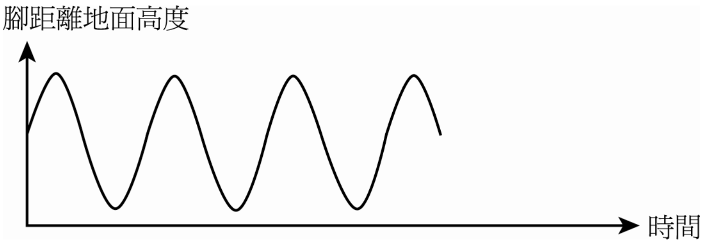


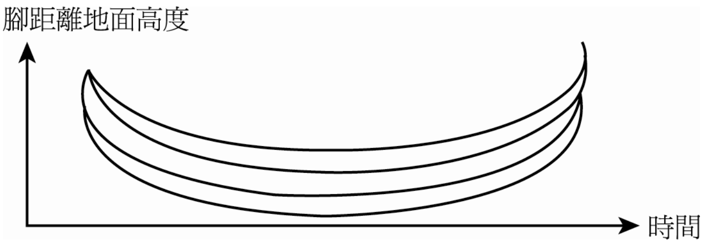
4 鞦韆

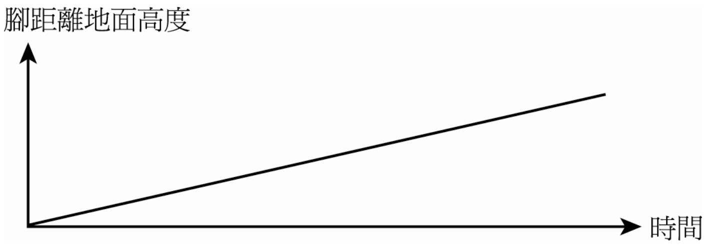
貞德坐在鞦韆上，她開始盪鞦韆，並試著盡可能將鞦韆盪到最高：

下面哪個圖最能代表她盪鞦韆時，腳距離地面的高度？

(A)


(B)


(C)


(D)


5 心跳

爲了健康的理由，人們應該控制他們的活動量，例如運動時，才不會超出特定的心跳頻率範圍。

數年來，個人最大心跳率和個人年齡的關係以下列的公式描述：

$$建議最大的心跳率 = 220 - 年齡 .$$

最近研究顯示這個公式應略微修正，新的公式如下：

$$建議最大的心跳率 = 208 - (0.7 \times 年齡) .$$

(1) 某家報紙報導：「使用新公式推算每分鐘最大心跳數的結果，年輕人的數據略爲減少，而老年人略爲增加」。

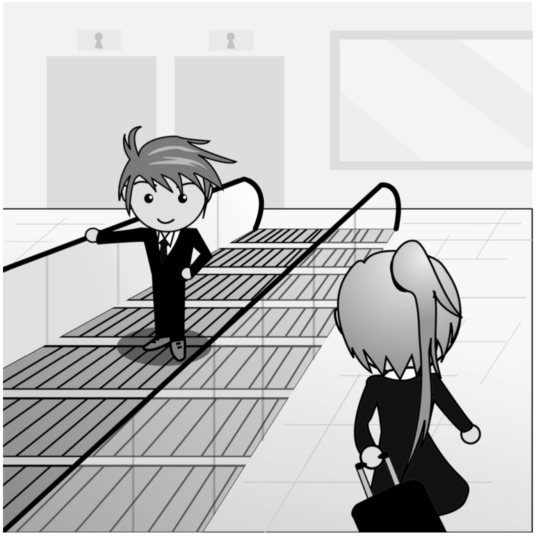
使用新公式推算，從哪一個年齡層起的最大心跳率開始增加。

(2) 建議的最大心跳率公式：$208 - (0.7 \times 年齡)$，也可以用來決定何時體能訓練是最有效率的。研究指出當心跳是最大心跳率的 80%時，此時體能訓練最有效。

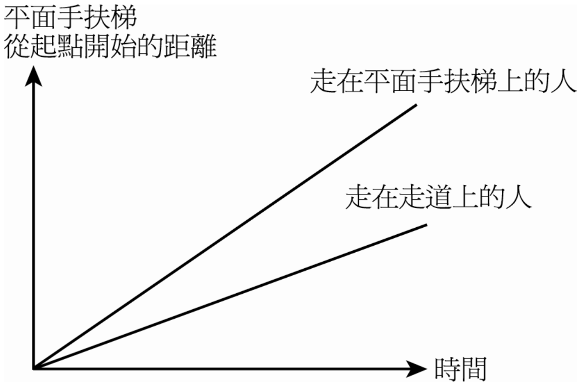
根據年齡寫下最有效率的體能訓練之心跳率計算公式。

6 平面手扶梯

下圖是一張平面手扶梯的照片：

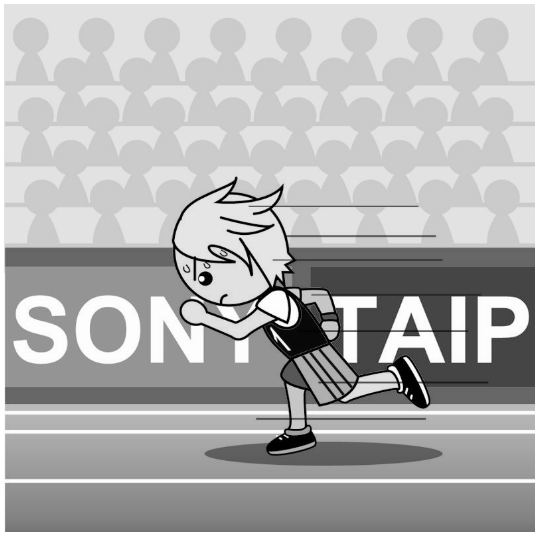


將「走在平面手扶梯」與「走在平面手扶梯旁的走道」的距離-時間相關圖描繪如下：



假如上圖中的兩個人走路的速度一樣，請在圖上畫出一條可以表示一個人站在平面手扶梯上的距離與時間關係的線。

7 最快的賽跑者



下列表格提供 2000 年奧運金牌得主在 100 米、200 米、400 米和 800 米項目中的賽跑時間：

項　目	男　子	女　子
100	9.87	10.07
200	20.0	21.8
400	43.8	49.1
800	1：45	？

(1) 下列哪一個最有可能是女子 800 米賽跑金牌得主的賽跑時間？

(A) 1：00.18　(B) 1：20.43　(C) 1：48.02　(D) 1：56.15

(2) 在以下表格中，請就各項陳述，填入「正確」或「不正確」：

陳　述	「正確」或「不正確」
一般來說，在奧運相同距離的賽跑中男子跑得比女子快。	
不論賽跑的距離如何，男子和女子賽跑之間的時間差距大約是一樣的。	

(3) 下列是 1896 年、1956 年和 2000 年的男子 100 米短跑金牌得主的賽跑時間：

年　份	時間以秒數計算
1896	12.0
1956	10.5
2000	9.87

請舉出你認爲的兩個理由來解釋爲什麼這些年來的賽跑時間愈來愈短。

三次方程式根的公式

葉善雲／臺北市東山高中

＊＊ 摘要

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有根的公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$，其中 $D=b^2-4ac$ 為判別式：

當 $D=b^2-4ac>0$ 時，方程式有兩個相異實根；

當 $D=0$ 時，方程式有二重根 $x=\dfrac{-b}{2a}$；

當 $D<0$ 時，方程式的兩根為共軛虛數。

那麼，三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的根是否也有公式呢？十六世紀的義大利數學家卡丹諾（G. Cardano，1501~1576）僅提供三次方程式的解法①，但沒有寫出具體的判別式與根的公式。本文嘗試提供三次方程式根的公式。

＊＊內文

延續前一篇文章「**三次方程式根的行列式判別**」中行列式的符號（請參閱龍騰數亦優第 14 期 P.5～14），我們考慮多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 與其導函數 $f'(x)$ 的關係，得

$$f(x)=f'(x)\cdot\left(\frac{x}{n}+\frac{a_{n-1}}{n^2a_n}\right)+\frac{1}{n^2a_n}\cdot\left(\Delta_1x^{n-2}+\Delta_2x^{n-3}+\cdots+\Delta_{n-2}x+\Delta_{n-1}\right)\qquad(*)$$

其中 Δ_k（$1\le k\le n-1$）為下列表達式第一列與第 $k+1$ 列所成之二階行列式：

$$\begin{pmatrix} na_n & a_{n-1} \\ (n-1)a_{n-1} & 2a_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ 2a_2 & (n-1)a_1 \\ a_1 & na_0 \end{pmatrix}，即 \Delta_k=\begin{vmatrix} na_n & a_{n-1} \\ (n-k)a_{n-k} & (k+1)a_{n-1-k} \end{vmatrix}，\ 1\le k\le n-1。$$

在式子 $(*)$ 兩側同乘 $n^na_n^{n-1}$ 得

$$n^na_n^{n-1}f(x)=(na_n)^{n-2}\ f'(x)\cdot(na_nx+a_{n-1})+(na_n)^{n-2}\cdot\left(\Delta_1x^{n-2}+\Delta_2x^{n-3}+\cdots+\Delta_{n-2}x+\Delta_{n-1}\right)(**)$$

可將此式化成 (na_nx+a_{n-1}) 的函數，同時使次高項（$(n-1)$ 次項）消失。

註 1：卡丹諾解法：在解三次方程式 $x^3+Ax+B=0$ 時，若能找到 u,v 使 $u^3+v^3+B=0$ 且 $3uv+A=0$（實際上，u^3,v^3 為二次方程式 $y^2+By+\left(\dfrac{-A}{3}\right)^3=0$ 的解），就能得出 $x^3+Ax+B=0$ 的解。設 $\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2$ 與 $\beta,\beta\omega,\beta\omega^2$ 分別為 u^3,v^3 之立方根，則 $\alpha+\beta,\alpha\omega+\beta\omega^2$ 與 $\alpha\omega^2+\beta\omega$ 為三次方程式 $x^3+Ax+B=0$ 的三根（此處 $\alpha\beta=\dfrac{-A}{3}$）。

例如，

(1) 當$n=2$時：$f(x)=ax^2+bx+c$，$f'(x)=2ax+b$，

$$4af(x)=f'(x)\cdot(2ax+b)+\Delta=(2ax+b)^2+\Delta$$ ，此處$\Delta=\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}=4ac-b^2$。

(2) 當$n=3$時：$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，

$$\begin{aligned}27a^2\cdot f(x)&=3af'(x)\cdot(3ax+b)+3a(\Delta_1x+\Delta_2)\\&=\left[(3ax+b)^2+3ac-b^2\right]\cdot(3ax+b)+\Delta_1\cdot(3ax+b)+3a\Delta_2-b\Delta_1\\&=(3ax+b)^3+\frac{3}{2}\cdot\Delta_1\cdot(3ax+b)+\begin{vmatrix}3a & \Delta_1\\ b & \Delta_2\end{vmatrix}\end{aligned}\qquad(3次-\mathrm{formula})$$

此處$\Delta_1=\begin{vmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\end{vmatrix}=6ac-2b^2$，且$\Delta_2=\begin{vmatrix}3a & b\\ c & 3d\end{vmatrix}=9ad-bc$。

應用上面的寫法，解二次方程式$ax^2+bx+c=0$相當於解二次方程式$(2ax+b)^2+\Delta=0$，得方程式的根爲$x=\frac{1}{2a}\left(-b\pm\sqrt{-\Delta}\right)$，其中$\Delta=4ac-b^2$。由(3次 - formula)，解三次方程式$ax^3+bx^2+cx+d=0$相當於解三次方程式

$$(3ax+b)^3+\frac{3}{2}\cdot\Delta_1\cdot(3ax+b)+\begin{vmatrix}3a & \Delta_1\\ b & \Delta_2\end{vmatrix}=0$$ ，其中$\Delta_1=\begin{vmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\end{vmatrix}$，且$\Delta_2=\begin{vmatrix}3a & b\\ c & 3d\end{vmatrix}$。

再由卡丹諾解法，解上述三次方程式相當於解下列二次方程式

$$y^2+\begin{vmatrix}3a & \Delta_1\\ b & \Delta_2\end{vmatrix}y+\left(\frac{-\Delta_1}{2}\right)^3=0\qquad(***)$$

由於此二次方程式的判別式爲

$$\begin{aligned}&\left(\begin{vmatrix}3a & \Delta_1\\ b & \Delta_2\end{vmatrix}\right)^2-4\cdot\frac{-\Delta_1{}^3}{8}\\&=9a^2\Delta_2{}^2-6ab\Delta_1\Delta_2+b^2\Delta_1{}^2+\frac{1}{2}\left(6ac-2b^2\right)\Delta_1{}^2\\&=9a^2\Delta_2{}^2+3ac\Delta_1{}^2-6ab\Delta_1\Delta_2\\&=3a\cdot\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

若令$\Omega=\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}$，則二次方程式(***)的解爲$y=\dfrac{-\begin{vmatrix}3a & \Delta_1\\ b & \Delta_2\end{vmatrix}\pm\sqrt{3a\Omega}}{2}$。

再根據前一篇文章「**三次方程式根的行列式判別**」，我們列出底下的結果作爲引理。

引理：

設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 爲實係數三次多項式，令 Δ_k（$k=1,\ 2$）爲下列表達式第一列與第 $k+1$ 列所成之二階行列式：

$$\begin{pmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\\ c & 3d\end{pmatrix}\text{，即}\Delta_1=\begin{vmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\end{vmatrix},\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}3a & b\\ c & 3d\end{vmatrix},\ \text{且令}\ \Omega=\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}\text{，}$$

則我們有下列方程式實根個數的判別：

(1) $\Omega=0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=0$ 有重根（二或三重根）。

(2) $a\cdot\Omega>0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=0$ 有一個實根及兩個虛根。

(3) $a\cdot\Omega<0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=0$ 有三個相異實根。

底下，我們就 $\Delta_1=\begin{vmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\end{vmatrix}$ 是否爲 0，$\begin{vmatrix}3a & \Delta_1\\ b & \Delta_2\end{vmatrix}$ 是否爲 0，與 $3a\Omega$ 的正負符號，討論三次方程式的根，進而推導三次方程式根的公式。

定理：（三次方程式根的行列式表示）

設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$ 爲實係數三次方程式，Δ_k 爲下列表達式第一列與第 $k+1$ 列所成之二階行列式：

$$\begin{pmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\\ c & 3d\end{pmatrix}\text{，令}\Delta_1=\begin{vmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\end{vmatrix},\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}3a & b\\ c & 3d\end{vmatrix}\text{，並設}\ \Omega=\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}\text{。}$$

1. 當 $\Omega=0$ 時，三次方程式 $f(x)=0$ 有重根：

   (1) 若 $\Delta_1=0$，則 $\Delta_2=0$，此時 $f(x)=0$ 有三重根 $-\dfrac{b}{3a}$。

   (2) 若 $\Delta_1\neq 0$，則 $f(x)=0$ 有二重根 $-\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$ 及另一實根 $-\dfrac{b}{a}+\dfrac{2\Delta_2}{\Delta_1}$。

2. 當 $a\cdot\Omega>0$ 時，三次方程式 $f(x)=0$ 有一實根及兩虛根：

   (1) 若 $\Delta_1=0$，則 $f(x)=0$ 的唯一實根爲 $\dfrac{1}{3a}\cdot\left(-b-\sqrt[3]{3a\Delta_2}\right)$，且兩虛根爲

   $\dfrac{1}{3a}\cdot\left(-b-\sqrt[3]{3a\Delta_2}\,\omega\right)$ 與 $\dfrac{1}{3a}\cdot\left(-b-\sqrt[3]{3a\Delta_2}\,\omega^2\right)$，其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$。

   (2) 若 $\begin{vmatrix}3a & \Delta_1\\ b & \Delta_2\end{vmatrix}=0$，則 $f(x)=0$ 的唯一實根爲 $\dfrac{-b}{3a}$，且另兩虛根爲

   $\dfrac{1}{3a}\cdot\left(-b\pm\sqrt{\dfrac{3\Delta_1}{2}}\cdot i\right)$。

(3) 若$\Delta_1 \neq 0$且$\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} \neq 0$，則$f(x)=0$的唯一實根爲

$$\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}+\sqrt{3a\Omega}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}-\sqrt{3a\Omega}}{2}}\right),$$

且另兩虛根爲

$$\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}+\sqrt{3a\Omega}}{2}}\cdot\omega+\sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}-\sqrt{3a\Omega}}{2}}\cdot\omega^2\right)\text{與}$$

$$\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}+\sqrt{3a\Omega}}{2}}\cdot\omega^2+\sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}-\sqrt{3a\Omega}}{2}}\cdot\omega\right)\text{。}$$

3. 當$a\cdot\Omega<0$時，三次方程式$f(x)=0$有三個相異實根（此時$\Delta_1<0$）②：

(1) 若$\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}=0$，則$f(x)=0$的三個實根爲$\frac{-b}{3a}$與$\frac{1}{3a}\cdot\left(-b\pm\sqrt{\frac{-3\Delta_1}{2}}\right)$。

(2) 若$\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}\neq 0$，則$f(x)=0$的三個實根爲 $\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt{-2\Delta_1}\cdot\cos\frac{\theta}{3}\right)$與

$$\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt{\frac{-\Delta_1}{2}}\cdot\left(-\cos\frac{\theta}{3}\pm\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\theta}{3}\right)\right)\text{，其中}\theta=\cos^{-1}\left(\frac{b\Delta_1-3a\Delta_2}{\sqrt{\frac{(-\Delta_1)^3}{2}}}\right)\text{③。}$$

註 2：當$f(x)=0$有三個相異實根時，$f(x)$必有兩個相異臨界點，即$f'(x)=0$有兩個相異實根，此時$(2b)^2-4\cdot 3ac=-2\cdot(6ac-2b^2)=-2\Delta_1>0$，於是$\Delta_1<0$。

註 3：當$\cos\theta>0$，取$0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$，此時$\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos\frac{\theta}{3}\leq 1$；當$\cos\theta<0$，取$\frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$，此時$\frac{1}{2}\leq\cos\frac{\theta}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$。

證明 》

1. 當 $\Omega=0$ 時，三次方程式 $f(x)=0$ 有重根的情形：

(1) 因爲當 $\Delta_1=0$ 時，由 $\Omega=3a{\Delta_2}^2=0$ 得 $\Delta_2=0$ 。又由(3次 - formula) ，知

$f(x)=\dfrac{1}{27a^2}\cdot(3ax+b)^3$ ，故 $f(x)=0$ 有三重根 $-\dfrac{b}{3a}$ 。

(2) 由 $f(x)=f'(x)\cdot q_1(x)+\dfrac{1}{9a}\cdot(\Delta_1 x+\Delta_2)$ 及 $f'(x)=\dfrac{1}{9a}\cdot(\Delta_1 x+\Delta_2)\cdot q_2(x)$ ④得

$f(x)=\dfrac{1}{9a}\cdot(\Delta_1 x+\Delta_2)\left[q_1(x)\cdot q_2(x)+1\right]$ ，又由重根定理知 $-\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$ 爲 $f(x)=0$ 的二重根，並得 $f(x)=0$ 的另一實根爲 $-\dfrac{b}{a}+\dfrac{2\Delta_2}{\Delta_1}$ 。

2. 當 $a\cdot\Omega>0$ 時，三次方程式 $f(x)=0$ 有一實根及兩虛根的情形：

(1) 因爲當 $\Delta_1=0$ 時，由(3次 - formula) 得

$f(x)=\dfrac{1}{27a^2}\cdot\left[(3ax+b)^3+3a\Delta_2\right]$ ，其中 $\Delta_2\neq 0$ （因爲 $a\Omega=3a^2{\Delta_2}^2>0$ ），

故 $f(x)=0$ 有唯一實根 $\dfrac{1}{3a}\cdot\left(-b-\sqrt[3]{3a\Delta_2}\right)$ ，且兩虛根爲 $\dfrac{1}{3a}\cdot\left(-b-\sqrt[3]{3a\Delta_2}\,\omega\right)$ 與 $\dfrac{1}{3a}\cdot\left(-b-\sqrt[3]{3a\Delta_2}\,\omega^2\right)$ ，其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 。

(2) 因爲當 $\begin{vmatrix}3a & \Delta_1\\ b & \Delta_2\end{vmatrix}=0$ 時（此時 $3a\Omega=\dfrac{{\Delta_1}^3}{2}$ ， $\Delta_1>0$ ），由(3次 - formula) 得

$27a^2\cdot f(x)=(3ax+b)^3+\dfrac{3}{2}\cdot\Delta_1\cdot(3ax+b)=(3ax+b)\left[(3ax+b)^2+\dfrac{3\Delta_1}{2}\right]$ ，

故 $f(x)=0$ 有唯一實根 $\dfrac{-b}{3a}$ ，且另兩虛根爲 $\dfrac{1}{3a}\cdot\left(-b\pm\sqrt{\dfrac{3\Delta_1}{2}}\cdot i\right)$ 。

註 4：二次多項式 Ax^2+Bx+C 除以一次多項式 $Dx+E$ 的餘式為 $\dfrac{1}{D^2}\cdot\begin{vmatrix}A & D & 0\\ B & E & D\\ C & 0 & E\end{vmatrix}$ 。

(3) 當$\Delta_1 \neq 0$且$\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} \neq 0$時，由(3次 - formula)得

$$27a^2 \cdot f(x) = (3ax+b)^3 + \frac{3}{2} \cdot \Delta_1 \cdot (3ax+b) + \begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix},$$

再由卡丹諾解法及二次方程式$y^2 + \begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} y + \left(\frac{-\Delta_1}{2}\right)^3 = 0$的兩根爲

$$y = \frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} + \sqrt{3a\Omega}}{2} \text{ 與 } y = \frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} - \sqrt{3a\Omega}}{2},$$

知$f(x) = 0$的唯一實根爲

$$\frac{1}{3a} \cdot \left(-b + \sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} + \sqrt{3a\Omega}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} - \sqrt{3a\Omega}}{2}} \right),$$

且另兩虛根爲

$$\frac{1}{3a} \cdot \left(-b + \sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} + \sqrt{3a\Omega}}{2}} \cdot \omega + \sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} - \sqrt{3a\Omega}}{2}} \cdot \omega^2 \right) \text{與}$$

$$\frac{1}{3a} \cdot \left(-b + \sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} + \sqrt{3a\Omega}}{2}} \cdot \omega^2 + \sqrt[3]{\frac{-\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} - \sqrt{3a\Omega}}{2}} \cdot \omega \right)。$$

3. 當$a \cdot \Omega < 0$時，三次方程式$f(x) = 0$有三個相異實根的情形（此時$\Delta_1 < 0$）：

(1) 因爲當$\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix} = 0$時，由(3次 - formula)得

$$27a^2 \cdot f(x) = (3ax+b)^3 + \frac{3}{2} \cdot \Delta_1 \cdot (3ax+b) = (3ax+b)\left[(3ax+b)^2 + \frac{3\Delta_1}{2}\right],$$

故$f(x) = 0$的三個實根爲$\frac{-b}{3a}$與$\frac{1}{3a} \cdot \left(-b \pm \sqrt{\frac{-3\Delta_1}{2}}\right)$。

(2) 設 $\dfrac{\left(b\Delta_1-3a\Delta_2\right)}{2}+\dfrac{\sqrt{3a\Omega}}{2}=\dfrac{\left(b\Delta_1-3a\Delta_2\right)}{2}+\dfrac{\sqrt{-3a\Omega}}{2}i=r\cdot\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$，

其中 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(b\Delta_1-3a\Delta_2\right)^2+\left(-3a\Omega\right)}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\Delta_1{}^3}{2}}=\sqrt{\left(\dfrac{-\Delta_1}{2}\right)^3}$，且 $0<\theta<\pi$，

則 $\dfrac{\left(b\Delta_1-3a\Delta_2\right)\pm\sqrt{3a\Omega}}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{-\Delta_1}{2}\right)^3}\cdot\left(\cos\theta\pm i\sin\theta\right)$。

於是由棣美弗定理得 $\dfrac{\left(b\Delta_1-3a\Delta_2\right)\pm\sqrt{3a\Omega}}{2}$ 的三個立方根爲

$\sqrt{\dfrac{-\Delta_1}{2}}\cdot\left(\cos\dfrac{\theta}{3}\pm i\sin\dfrac{\theta}{3}\right)$, $\sqrt{\dfrac{-\Delta_1}{2}}\cdot\left(\cos\dfrac{\theta}{3}\pm i\sin\dfrac{\theta}{3}\right)\cdot\omega$ 與

$\sqrt{\dfrac{-\Delta_1}{2}}\cdot\left(\cos\dfrac{\theta}{3}\pm i\sin\dfrac{\theta}{3}\right)\cdot\omega^2$。

因此，由(3次 - formula) 及卡丹諾解法知 $f(x)=0$ 的三個根爲

$$x_1=\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+2\cdot\sqrt{\frac{-\Delta_1}{2}}\cdot\cos\frac{\theta}{3}\right)=\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt{-2\Delta_1}\cdot\cos\frac{\theta}{3}\right),$$

$$x_2=\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt{\frac{-\Delta_1}{2}}\cdot\left[\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right)\cdot\omega+\left(\cos\frac{\theta}{3}-i\sin\frac{\theta}{3}\right)\cdot\omega^2\right]\right)$$

$$=\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt{\frac{-\Delta_1}{2}}\cdot\left(-\cos\frac{\theta}{3}-\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\theta}{3}\right)\right),$$

$$x_3=\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt{\frac{-\Delta_1}{2}}\cdot\left[\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right)\cdot\omega^2+\left(\cos\frac{\theta}{3}-i\sin\frac{\theta}{3}\right)\cdot\omega\right]\right)$$

$$=\frac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt{\frac{-\Delta_1}{2}}\cdot\left(-\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\theta}{3}\right)\right),$$

故 $f(x)=0$ 的三個實根爲 $\dfrac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt{-2\Delta_1}\cdot\cos\dfrac{\theta}{3}\right)$ 與

$\dfrac{1}{3a}\cdot\left(-b+\sqrt{\dfrac{-\Delta_1}{2}}\cdot\left(-\cos\dfrac{\theta}{3}\pm\sqrt{3}\cdot\sin\dfrac{\theta}{3}\right)\right)$，其中 $\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{b\Delta_1-3a\Delta_2}{\sqrt{\dfrac{\left(-\Delta_1\right)^3}{2}}}\right)$。

推論 》

1. 若整係數三次方程式有重根，則此方程式的三根皆爲有理根。⑤

註 5：當三次方程式有重根時（根的判別式為 0），由卡丹諾解法所推得的公式解，仍出現立方根的形式，不易直接判定根是否為有理數。

2. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數三次多項式，則

$f(x)=0$ 的三個根成等差 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}=0$。⑥

此時 $f(x)=0$ 的三個根為 $-\dfrac{b}{3a}$ 與 $-\dfrac{b}{3a}\pm\dfrac{1}{3a}\cdot\sqrt{\dfrac{-3\Delta_1}{2}}$。

實例說明》

1. 三次方程式 $8x^3-12\sqrt{3}x^2+18x-3\sqrt{3}=0$（$\Omega=0$ 且 $\Delta_1=0$）有三重根 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。
2. 三次方程式 $x^3-3x^2+3x+1=0$（$\Omega>0$ 且 $\Delta_1=0$）有唯一實根 $1+\sqrt[3]{2}$ 及兩虛根 $1+\sqrt[3]{2}\omega$ 與 $1+\sqrt[3]{2}\omega^2$。
3. 三次方程式 $x^3-3\sqrt{2}x^2+9x-5\sqrt{2}=0$（$\Omega>0$ 且 $\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}=0$）有唯一實根 $\sqrt{2}$ 及兩虛根 $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}i$。
4. 三次方程式 $2x^3-3x^2+2=0$（$\Omega>0$，$\Delta_1\neq 0$ 且 $\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}\neq 0$）有唯一實根 $\dfrac{1}{2}\cdot(1+\sqrt[3]{-3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{-3-2\sqrt{2}})$。（此值約 -0.677651）
5. 三次方程式 $x^3-3\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}=0$（$\Omega<0$ 且 $\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}=0$）有三個相異實根 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{2}-\sqrt{3}$。
6. 說明 $x^3-x^2+\left(4\sqrt{2}-7\right)x+\left(11-8\sqrt{2}\right)=0$ 有二重根 $1-\sqrt{2}$ 及另一實根 $2\sqrt{2}-1$。

   令 $f(x)=x^3-x^2+\left(4\sqrt{2}-7\right)x+\left(11-8\sqrt{2}\right)$，$f'(x)=3x^2-2x+\left(4\sqrt{2}-7\right)$。

   由 Δ_k 的表達式：$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2\cdot\left(4\sqrt{2}-7\right) \\ 4\sqrt{2}-7 & 3\cdot\left(11-8\sqrt{2}\right) \end{vmatrix}$，得 $\Delta_1=4\cdot\left(6\sqrt{2}-11\right)$，$\Delta_2=4\cdot\left(23-17\sqrt{2}\right)$。

   由判別式 $\Omega=4^2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6\sqrt{2}-11 & 0 \\ -2 & 23-17\sqrt{2} & 6\sqrt{2}-11 \\ 4\sqrt{2}-7 & 0 & 23-17\sqrt{2} \end{vmatrix}=0$，

   知方程式有二重根 $-\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}=-\dfrac{23-17\sqrt{2}}{6\sqrt{2}-11}=\dfrac{49-49\sqrt{2}}{49}=1-\sqrt{2}$ 及另一實根 $2\sqrt{2}-1$。

註 6：當 $f(x)=0$ 的三個根成等差且公差為 δ（δ 可能為複數）時，不妨設 $f(x)=a\cdot\left(x-r\right)\left(x-r+\delta\right)\left(x-r-\delta\right)=a\cdot\left(x^3-3rx^2+\left(3r^2-\delta^2\right)x-r\left(r^2-\delta^2\right)\right)$，則 $f'(x)=3ax^2-6arx+3ar^2-a\delta^2$。

由 Δ_k 的表達式：$\begin{vmatrix} 3a & -3ar \\ -6ar & 2a\cdot\left(3r^2-\delta^2\right) \\ 3ar^2-a\delta^2 & -3ar\cdot\left(r^2-\delta^2\right) \end{vmatrix}$，得 $\Delta_1=-6a^2\delta^2,\Delta_2=6a^2r\delta^2$，於是 $\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 \\ b & \Delta_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3a & -6a^2\delta^2 \\ -3ar & 6a^2r\delta^2 \end{vmatrix}=0$。

7. 欲求k值使方程式$x^3+kx^2+kx+1=0$有二或三重根，方法如下：

令$f(x)=x^3+kx^2+kx+1$，$f'(x)=3x^2+2kx+k$。

由Δ_k的表達式：$\begin{vmatrix}3 & k\\ 2k & 2k\\ k & 3\end{vmatrix}$，得$\Delta_1=-2k\cdot(k-3)$，$\Delta_2=-(k-3)(k+3)$。

由判別式$\Omega=\begin{vmatrix}3 & -2k\cdot(k-3) & 0\\ 2k & -(k-3)(k+3) & -2k\cdot(k-3)\\ k & 0 & -(k-3)(k+3)\end{vmatrix}=0$，得$(k-3)^3(k+1)=0$，

當$k=3$時，$x^3+kx^2+kx+1=0$有三重根$-\dfrac{k}{3}=-1$；

當$k=-1$時，$x^3+kx^2+kx+1=0$有二重根$-\dfrac{(k+3)}{2k}=1$且另一根爲$-k-2\cdot 1=-1$。

8. 說明三次方程式$x^3-7x+6=0$有三相異實根$1,\ 2$與-3。

令$f(x)=x^3-7x+6$，則$f'(x)=3x^2-7$，得$\Delta_1=-42$，$\Delta_2=54$，

於是$\Omega=6^2\cdot\begin{vmatrix}3 & -7 & 0\\ 0 & 9 & -7\\ -7 & 0 & 9\end{vmatrix}=-3600<0$，由根的判別定理知$f(x)=0$有三個相異實根。

因此由$\cos\theta=\dfrac{b\Delta_1-3a\Delta_2}{\sqrt{\dfrac{-\Delta_1{}^3}{2}}}=\dfrac{-162}{42\sqrt{21}}=\dfrac{-27}{7\sqrt{21}}$，取$\cos\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{3}{\sqrt{21}}$，$\sin\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，

（實際上，由$\cos\theta=\dfrac{-27}{7\sqrt{21}}$，可得$\cos\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}},\dfrac{3}{\sqrt{21}}$或$\dfrac{-9}{2\sqrt{21}}$）

得方程式$f(x)=0$的三根爲$\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{-2\Delta_1}\cdot\cos\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{84}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{21}}=2$與

$\dfrac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{-\Delta_1}{2}}\cdot\left(-\cos\dfrac{\theta}{3}\pm\sqrt{3}\cdot\sin\dfrac{\theta}{3}\right)\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{21}\cdot\left(-\dfrac{3}{\sqrt{21}}\pm\sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)\right)=-1\pm 2=1$或$-3$。

〔另解〕由$\dfrac{-\begin{vmatrix}3a & \Delta_1\\ b & \Delta_2\end{vmatrix}\pm\sqrt{3a\Omega}}{2}=\dfrac{-3\cdot 54\pm\sqrt{3\cdot(-3600)}}{2}=-81\pm 30\sqrt{3}i$的立方根⑦分別爲

$\dfrac{3}{2}\mp\dfrac{5\sqrt{3}}{2}i,\ 3\pm 2\sqrt{3}i,\ -\dfrac{9}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，得方程式$f(x)=0$的三根爲

$\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}i\right)=1$及$\dfrac{1}{3}\cdot\left(3+2\sqrt{3}i+3-2\sqrt{3}i\right)=2$與

$\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{-9}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{-9}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-3$。

註 7：利用「若$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=\alpha+\beta\sqrt{B}$，則$\alpha$滿足三次方程式$4x^3-3\cdot\sqrt[3]{A^2-B}\cdot x-A=0$且$\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{A}{\alpha}+2\cdot\sqrt[3]{A^2-B}$。」化簡根式。

利用外積與三階行列式的概念—

求兩歪斜線之公垂線段的兩端點坐標

李維昌／國立宜蘭高中

※ 研究目的 》

試圖利用外積與三階行列式的概念，來求兩歪斜線之公垂線段的兩端點坐標。

※ 研究過程 》

已知空間直角坐標系中，O 爲原點，兩歪斜線 L_1 與 L_2 分別通過點 A_1,A_2 ，L_1 與 L_2 的方向向量分別爲 $\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2}$ ，$\overrightarrow{d_1}$ 不平行 $\overrightarrow{d_2}$ ，試求 L_1 與公垂線的交點 B_1 及 L_2 與公垂線的交點 B_2 坐標。

一、設 $\overrightarrow{A_1B_1}=t_1\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{A_2B_2}=t_2\overrightarrow{d_2}$ 。

二、$\because$ $\overrightarrow{A_1B_2},\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}$ 共平面，

$$\therefore \begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1B_2}\\ \overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_2B_2}-\overrightarrow{A_2A_1}\\ \overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}t_2\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_2A_1}\\ \overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}=0\Rightarrow t_2=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_2A_1}\\ \overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}\text{。}$$

三、$\because$ $\overrightarrow{A_2B_1},\overrightarrow{d_2},\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}$ 共平面，

$$\therefore \begin{vmatrix}\overrightarrow{A_2B_1}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A_2}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}t_1\overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}=0\Rightarrow t_1=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}\text{。}$$

四、結論：$\begin{cases}\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OA_1}+t_1\ \overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{OA_2}+t_2\ \overrightarrow{d_2}\end{cases}, t_1=\dfrac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}, t_2=\dfrac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_2A_1}\\ \overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\\ \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}$。

五、應用：

設空間二歪斜線：$L_1:\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+7}{-1}, L_2:\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-6}{-2}$，已知 $\overrightarrow{d_1}=(4,-3,-1),\overrightarrow{d_2}=(3,-4,-2),\overrightarrow{OA_1}=(11,-5,-7),\overrightarrow{OA_2}=(-5,4,6)$，$O$ 爲空間直角坐標系的原點，$\overrightarrow{A_1A_2}=(-16,9,13)$。試求 (1) L_1 與公垂線的交點 B_1。(2) L_2 與公垂線的交點 B_2。

Sol

$$t_1=\dfrac{\begin{vmatrix}-16 & 9 & 13\\ 3 & -4 & -2\\ \begin{vmatrix}-3 & -1\\ -4 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -3 & -1\\ 3 & -4 & -2\\ \begin{vmatrix}-3 & -1\\ -4 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix}\end{vmatrix}}=\dfrac{\begin{vmatrix}-16 & 9 & 13\\ 3 & -4 & -2\\ 2 & 5 & -7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -3 & -1\\ 3 & -4 & -2\\ 2 & 5 & -7\end{vmatrix}}=\dfrac{-156}{78}=-2,$$

$$t_2=\dfrac{\begin{vmatrix}16 & -9 & -13\\ 4 & -3 & -1\\ \begin{vmatrix}-3 & -1\\ -4 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -4 & -2\\ 4 & -3 & -1\\ \begin{vmatrix}-3 & -1\\ -4 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix}\end{vmatrix}}=\dfrac{\begin{vmatrix}16 & -9 & -13\\ 4 & -3 & -1\\ 2 & 5 & -7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -4 & -2\\ 4 & -3 & -1\\ 2 & 5 & -7\end{vmatrix}}=\dfrac{-156}{-78}=2,$$

$\overrightarrow{OB_1}=(11,-5,-7)+(-2)\cdot(4,-3,-1)=(3,1,-5)$，

$\overrightarrow{OB_2}=(-5,4,6)+2\cdot(3,-4,-2)=(1,-4,2)$.

參考文獻：

1. 李維昌（98 年 4 月 30 日），
   利用正射影及外積的概念求兩歪斜線之公垂線段的距離及端點坐標，
   龍騰數亦優，第 9 刊，P.17
2. 李維昌（98 年 12 月），
   利用平面的法向量來求兩歪斜線的公垂線段的兩端點坐標，
   數學傳播，第三十三卷第四期，P.63～66
3. 李維昌（99 年 3 月 30 日），
   利用內積與克拉瑪公式求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標的公式解法，
   龍騰數亦優，第 11 刊，P.12～14
4. 李維昌（99 年 12 月），
   利用向量三重積求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標的公式解法，
   數學傳播，第三十四卷第四期，P.43～45
5. 李維昌（100 年 3 月），
   利用直線參數式與克拉瑪公式求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標的公式解法，
   龍騰數亦優，第 14 刊，P.20～22

Apollonius 問題—

兼談三條件決定圓(三)

趙文敏／臺灣師大數學系

9 點圓圓問題

問題：給定兩相異圓 $O_1(r_1)$， $O_2(r_2)$ 及一點 A ，試作出過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都相切的圓。

解：根據給定點與給定圓的相對位置，我們考慮下面十六種情形：

一、 圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 外離，點 A 在兩圓的外部但不在兩圓的連心線上，也不在兩圓的外公切線、內公切線上；設 $r_1 > r_2$ 。

《作圖法》

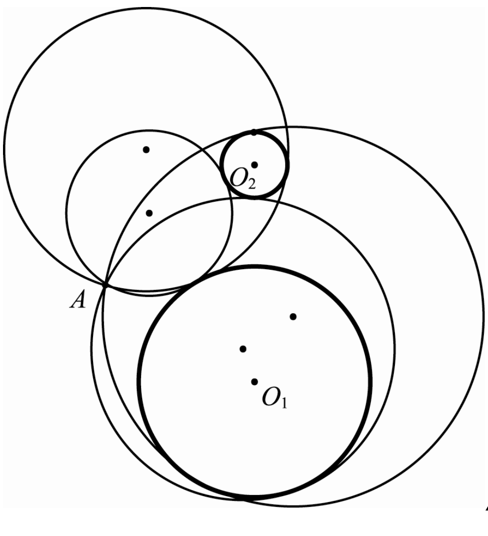
在此情形中，所求圓共有四解（如圖 43 所示），依相切狀況分成兩組。

第一組兩解：

此兩圓可能與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，也與圓 $O_2(r_2)$ 都內切；
可能與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，也與圓 $O_2(r_2)$ 都外切；
可能其中一圓與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都外切，
另一圓與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都內切。（如圖 44 所示）

第二組兩解：

此兩圓可能與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，而與圓 $O_2(r_2)$ 都內切；
可能與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，而與圓 $O_2(r_2)$ 都外切；
可能其中一圓與圓 $O_1(r_1)$ 外切，而與圓 $O_2(r_2)$ 內切，
另一圓與圓 $O_1(r_1)$ 內切，而與圓 $O_2(r_2)$ 外切。（如圖 45 所示）

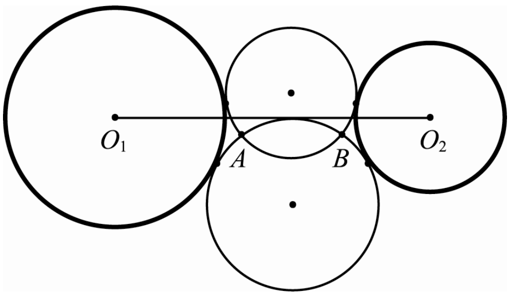


▲圖 43

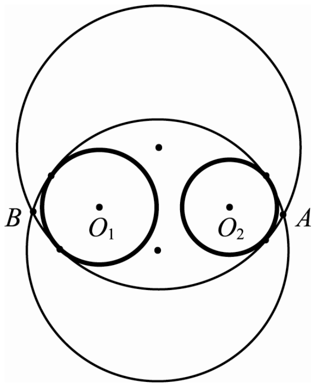
設直線 O_1O_2 與圓 $O_1(r_1)$ 交於點 C,C'，直線 O_1O_2 與圓 $O_2(r_2)$ 交於點 D,D'，其中，點 C,D 在線段 $\overline{O_1O_2}$ 上。設點 O 是直線 O_1O_2 上滿足 $\overline{OO_1}:\overline{OO_2}=r_1:r_2$ 的外分點，稱爲圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 的外相似中心（outer center of similitude）；又設點 O' 是線段 $\overline{O_1O_2}$ 上滿足 $\overline{OO_1}:\overline{OO_2}=r_1:r_2$ 的內分點，稱爲圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 的內相似中心（inner center of similitude）。當兩圓有兩條相交的外公切線時，它們的外相似中心就是兩圓的外公切線的交點；當兩圓有兩條相交的內公切線時，它們的內相似中心就是兩圓的內公切線的交點。

＊ 第一組：與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都外切或都內切的圓

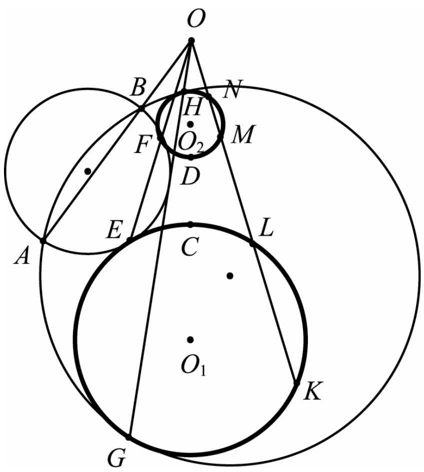
1. 因爲點 A 不在直線 O_1O_2 上，所以點 A,C,D 共圓（參看圖 44(c)）。設直線 AO 與圓 ACD 相交於點 A 與另一點 B 。
2. 仿照第八小節第一種情形的作圖法，作出過點 A,B 且與圓 $O_1(r_1)$ 相切的圓。因爲點 A 不在兩圓的外公切線上，所以直線 ABO 與圓 $O_1(r_1)$ 不相切；因爲所作的圓與圓 $O_1(r_1)$ 相切且通過圓 $O_1(r_1)$ 外部的點 A ，所以點 B 也在圓 $O_1(r_1)$ 的外部。根據第八小節第一種情形的結果，過點 A,B 且與圓 $O_1(r_1)$ 相切的圓有兩解。
3. 可證得上述作圖法第 2 點所作的圓也都與圓 $O_2(r_2)$ 相切。因此，此兩圓即爲所欲求的其中兩圓。



(a)



(b)



(c) ▲圖 44

《證明》

此證明的重點是：

上述作圖法第 2 點所作的圓只說明與圓 $O_1(r_1)$ 相切，為什麼也與圓 $O_2(r_2)$ 相切？

因為 $r_1 > r_2$，所以點 O_2 介於點 O 與點 O_1 之間。令 ρ 表示點 O 至圓 $O_1(r_1)$ 的切線段之長。

若過兩外公切線交點 O 的一直線與圓 $O_1(r_1)$ 交於點 K, L（設 $\overline{OK} \geq \overline{OL}$），又與圓 $O_2(r_2)$ 交於點 M, N（設 $\overline{OM} \geq \overline{ON}$），則得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{r_2}{r_1} \times \overrightarrow{OK}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{r_2}{r_1} \times \overrightarrow{OL}, \quad \overrightarrow{OK} \times \overrightarrow{OL} = \rho^2 .$$

由此可得

$$\overrightarrow{OL} \times \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OL} \times (\frac{r_2}{r_1} \times \overrightarrow{OK}) = \frac{r_2\rho^2}{r_1}, \quad \overrightarrow{OK} \times \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OK} \times (\frac{r_2}{r_1} \times \overrightarrow{OL}) = \frac{r_2\rho^2}{r_1} .$$

特例：將上述結果應用到直線 O_1O_2，即得 $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD} = \dfrac{r_2\rho^2}{r_1}$。

由此可得

$$\overrightarrow{OK} \times \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OL} \times \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD} . \qquad (*)$$

設過點 A、點 B 且與圓 $O_1(r_1)$ 相切的一圓切圓 $O_1(r_1)$ 於點 E。依(*)式，在直線 OE 與圓 $O_2(r_2)$ 的兩交點中有一點 F 滿足

$$\overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD} .$$

因為 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD}$，所以 $\overrightarrow{OE} \times \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$。依圓的外冪定理，可知點 F 在圓 ABE 上，亦即：點 F 是圓 ABE 與圓 $O_2(r_2)$ 的一個交點。

設圓 ABE 與圓 $O_2(r_2)$ 有另一個交點 F'，則直線 OF' 與圓 $O_1(r_1)$ 的兩交點中有一點 E' 滿足 $\overrightarrow{OE'} \times \overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD}$。又設直線 OF' 與圓 ABE 又交於點 E''，依圓的外冪定理，可知 $\overrightarrow{OE''} \times \overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$。因為 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD}$，所以得

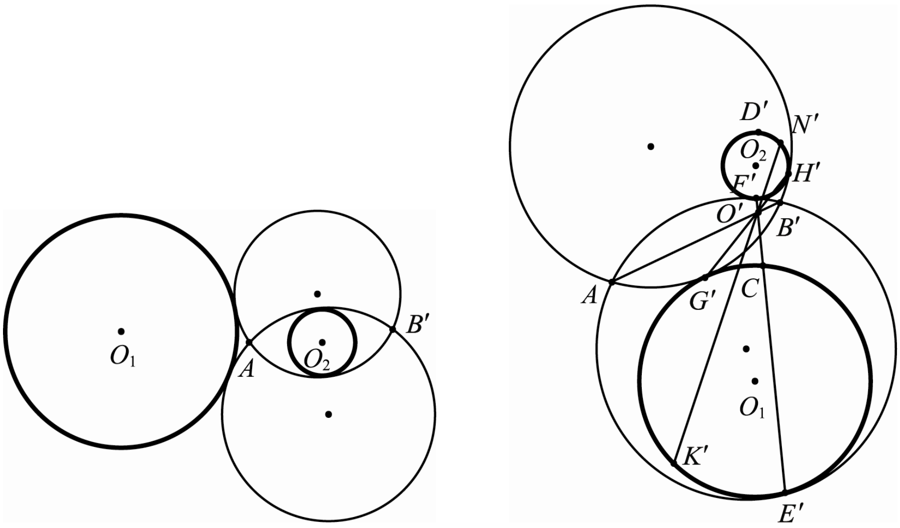
$$\overrightarrow{OE'} \times \overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OE''} \times \overrightarrow{OF'} .$$

因為 $O \neq F'$，所以 $E' = E''$。因為圓 $O_1(r_1)$ 與圓 ABE 相切於點 E，所以得 $E' = E'' = E$，$F' = F$，亦即：圓 ABE 與圓 $O_2(r_2)$ 相切於點 F。

同理，過點 A、點 B 且與圓 $O_1(r_1)$ 相切的另一圓也與圓 $O_2(r_2)$ 相切。

∗ 第二組：與圓 $O_1(r_1)$、圓 $O_2(r_2)$ 一外切一內切的圓

1. 因為點 A 不在直線 O_1O_2 上，所以 A, C, D' 共圓（參看圖 45 的第二圖）。設直線 AO' 與圓 ACD' 相交於點 A 與另一點 B'。
2. 仿照第八小節第一種情形的作圖法，作出過點 A, B' 且與圓 $O_1(r_1)$ 相切的圓。因為點 A 不在兩圓的內公切線上，所以直線 $AB'O'$ 與圓 $O_1(r_1)$ 不相切；因為所作的圓與圓 $O_1(r_1)$ 相切且通過圓 $O_1(r_1)$ 外部的點 A，所以點 B' 也在圓 $O_1(r_1)$ 的外部。根據第八小節第一種情形的結果，過點 A, B' 且與圓 $O_1(r_1)$ 相切的圓有兩解。
3. 可證得上述作圖法第 2 點所作的圓也都與圓 $O_2(r_2)$ 相切。因此，此兩圓即為所欲求的其中兩圓。



(*a*) (*b*) ▲圖 45

《證明》

此證明的重點是：

上述作圖法第 2 點所作的圓只說明與圓 $O_1(r_1)$ 相切，為什麼也與圓 $O_2(r_2)$ 相切？

令 ρ' 表示點 O' 至圓 $O_1(r_1)$ 的切線段之長。

若過內公切線交點 O' 的一直線與圓 $O_1(r_1)$ 交於點 K' 與點 L'（$\overline{O'K'} \ge \overline{O'L'}$），又與圓 $O_2(r_2)$ 交於點 M' 與點 N'（$\overline{O'M'} \le \overline{O'N'}$），則得

$$\overrightarrow{O'N'} = -\frac{r_2}{r_1}\times\overrightarrow{O'K'}\ ,\ \ \overrightarrow{O'M'} = -\frac{r_2}{r_1}\times\overrightarrow{O'L'}\ ,\ \ \overrightarrow{O'K'}\times\overrightarrow{O'L'} = \rho'^2\ .$$

由此可得

$$\overrightarrow{O'K'}\times\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{O'K'}\times(-\frac{r_2}{r_1}\times\overrightarrow{O'L'}) = -\frac{r_2\rho'^2}{r_1}\ ,$$

$$\overrightarrow{O'L'}\times\overrightarrow{O'N'} = \overrightarrow{O'L'}\times(-\frac{r_2}{r_1}\times\overrightarrow{O'K'}) = -\frac{r_2\rho'^2}{r_1}\ .$$

特例：將上述結果應用到直線 O_1O_2，即得 $\overrightarrow{O'C}\times\overrightarrow{O'D'} = -\frac{r_2\rho'^2}{r_1}$。

由此可得

$$\overrightarrow{O'K'}\times\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{O'L'}\times\overrightarrow{O'N'} = \overrightarrow{O'C}\times\overrightarrow{O'D'}\ . \qquad (*)$$

設過點 A、點 B' 且與圓 $O_1(r_1)$ 相切的一圓切圓 $O_1(r_1)$ 於點 E'。依(*)式，在直線 $O'E'$ 與圓 $O_2(r_2)$ 的兩交點中有一點 F' 滿足

$$\overrightarrow{O'E'}\times\overrightarrow{O'F'} = \overrightarrow{O'C}\times\overrightarrow{O'D'}\ .$$

因為 $\overrightarrow{O'A}\times\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'C}\times\overrightarrow{O'D'}$，所以 $\overrightarrow{O'E'}\times\overrightarrow{O'F'} = \overrightarrow{O'A}\times\overrightarrow{O'B'}$。依圓的內冪定理，可知點 F' 在圓 $AB'E'$ 上，亦即：點 F' 是圓 $AB'E'$ 與圓 $O_2(r_2)$ 的一個交點。

設圓 $AB'E'$ 與圓 $O_2(r_2)$ 有另一個交點 F''，則直線 $O'F''$ 與圓 $O_1(r_1)$ 的兩交點中有一點 E'' 滿足 $\overrightarrow{O'E''}\times\overrightarrow{O'F''}=\overrightarrow{O'C}\times\overrightarrow{O'D'}$。又設直線 $O'F''$ 與圓 $AB'E'$ 又交於點 E'''，依內冪定理，可知 $\overrightarrow{O'E'''}\times\overrightarrow{O'F''}=\overrightarrow{O'A}\times\overrightarrow{O'B'}$。因為 $\overrightarrow{O'A}\times\overrightarrow{O'B'}=\overrightarrow{O'C}\times\overrightarrow{O'D'}$，所以得

$$\overrightarrow{O'E''}\times\overrightarrow{O'F''}=\overrightarrow{O'E'''}\times\overrightarrow{O'F''}\ .$$

因為 $O'\neq F''$，所以 $E''=E'''$。因為圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $AB'E'$ 相切於點 E'，所以得 $E''=E'''=E'$，$F''=F'$，亦即：圓 $AB'E'$ 與圓 $O_2(r_2)$ 相切於點 F'。

同理，過點 A、點 B' 且與圓 $O_1(r_1)$ 相切的另一圓也與圓 $O_2(r_2)$ 相切。

思考問題 33：

試證：若圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 外離且半徑不相等，點 A 在兩圓的外部但不在兩圓的連心線上，也不在兩圓的外公切線、內公切線上，則圓 X 過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$、圓 $O_2(r_2)$ 都相切的充要條件是：**圓心 X 是雙曲線 $H(A,O_1;r_1)$ 與雙曲線 $H(A,O_2;r_2)$ 的一交點**。

二、 兩圓 $O_1(r)$ 與圓 $O_2(r)$ 外離且半徑相等，點 A 在兩圓的外部但不在兩圓的連心線上，也不在兩圓的外公切線、內公切線上。

《作圖法》

在此情形中，所求圓共有四解（如圖 46 所示），依相切狀況分成兩組。

第一組兩解：

此兩圓可能與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，也與圓 $O_2(r_2)$ 都內切；

可能與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，也與圓 $O_2(r_2)$ 都外切；

可能其中一圓與圓 $O_1(r_1)$、圓 $O_2(r_2)$ 都外切，

另一圓與圓 $O_1(r_1)$、圓 $O_2(r_2)$ 都內切。（如圖 47 所示）

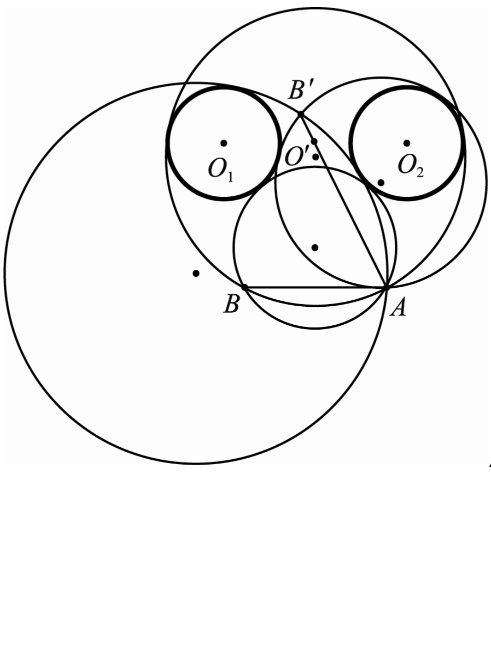
第二組兩解：

此兩圓可能與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，而與圓 $O_2(r_2)$ 都內切；

可能與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，而與圓 $O_2(r_2)$ 都外切；

可能其中一圓與圓 $O_1(r_1)$ 外切，而與圓 $O_2(r_2)$ 內切，

另一圓與圓 $O_1(r_1)$ 內切，而與圓 $O_2(r_2)$ 外切。（如圖 48 所示）

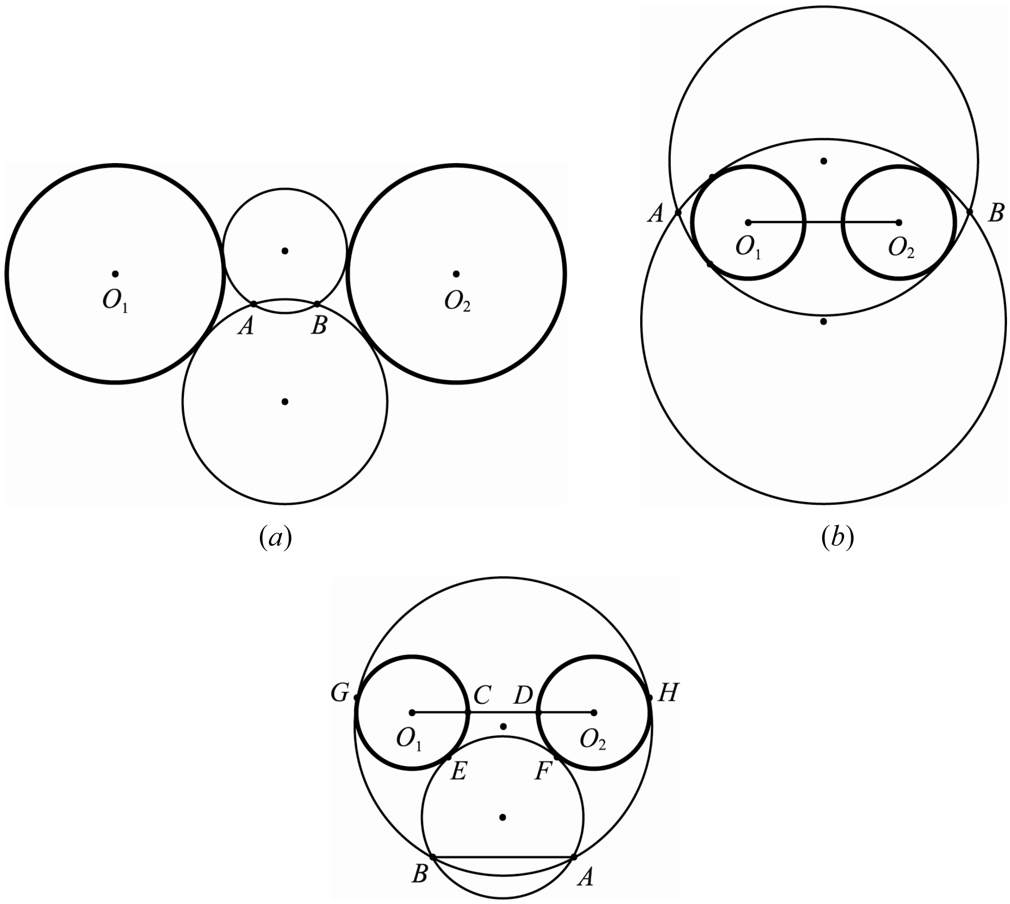


▲圖 46

設直線O_1O_2與圓$O_1(r)$交於點C,C'，直線O_1O_2與圓$O_2(r)$交於點D,D'，其中，點C,D在線段$\overline{O_1O_2}$上。因為圓$O_1(r)$與圓$O_2(r)$的半徑相等，所以圓$O_1(r)$與圓$O_2(r)$沒有外相似中心，而其內相似中心是$\overline{O_1O_2}$的中點，也是$\overline{CD}$的中點。

＊ 第一組：與圓$O_1(r)$、圓$O_2(r)$都外切或都內切的圓

1. 因為點A不在直線O_1O_2上，所以點A,C,D共圓（參看圖 47 的第三圖）。過點A作一直線與直線O_1O_2平行，設此平行線與圓ACD相交於點A與另一點B。
2. 仿照第八小節第一種情形的作圖法，作出過點A,B且與圓$O_1(r)$相切的圓。因為點A不在兩圓的外公切線上，即直線AB與圓$O_1(r)$不相切；因為所作的圓與圓$O_1(r)$相切且通過圓$O_1(r)$外部的點A，所以點B也在圓$O_1(r)$的外部。根據第八小節第一種情形的結果，過點A,B且與圓$O_1(r)$相切的圓有兩解。
3. 可證得上述作圖法第 2 點所作的圓也都與圓$O_2(r)$相切。因此，此兩圓即為所欲求的其中兩圓。



(a) (b)

(c) ▲圖 47

《證明》

此證明的重點是：

上述作圖法第 2 點所作的圓只說明與圓$O_1(r)$相切，為什麼也與圓$O_2(r)$相切？

設過點A、點B且與圓$O_1(r)$相切的一圓切圓$O_1(r)$於點E。因為圓$O_1(r)$與圓$O_2(r)$的半徑相等，所以圓$O_1(r)$與圓$O_2(r)$對$\overline{CD}$的垂直平分線成對稱。另一方面，因為圓

ABE 的圓心在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上，而 $\overline{AB}$ 的垂直平分線與 $\overline{CD}$ 的垂直平分線重合，所以圓 ABE 本身對 $\overline{CD}$ 的垂直平分線成對稱。

設點 E 對 $\overline{CD}$ 的垂直平分線的對稱點為點 F。因為圓 ABE 與圓 $O_1(r)$ 相切於點 E，所以將圓 $O_1(r)$ 、圓 ABE 與點 E 對 $\overline{CD}$ 的垂直平分線作鏡射，所得的對稱圖形也相切，亦即：圓 ABE 與圓 $O_2(r)$ 相切於點 F。

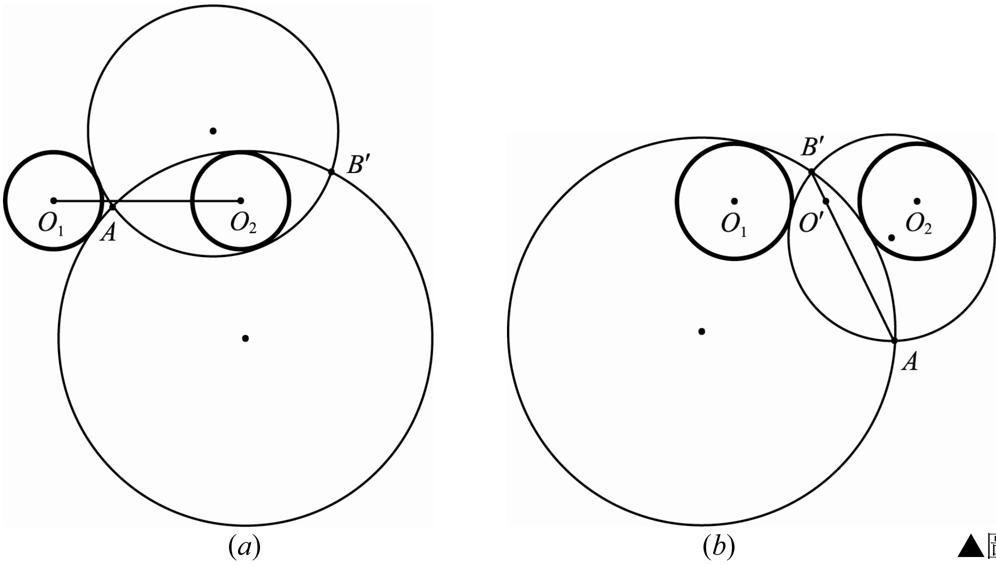
同理，過點 A、點 B 且與圓 $O_1(r)$ 相切的另一圓也與圓 $O_2(r)$ 相切。

＊ 第二組：與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 一外切一內切的圓

與第一種情形第二組圓的作圖法相同，共兩解。（如圖 48 所示）

《證明》

與第一種情形第二組圓的證明相同。

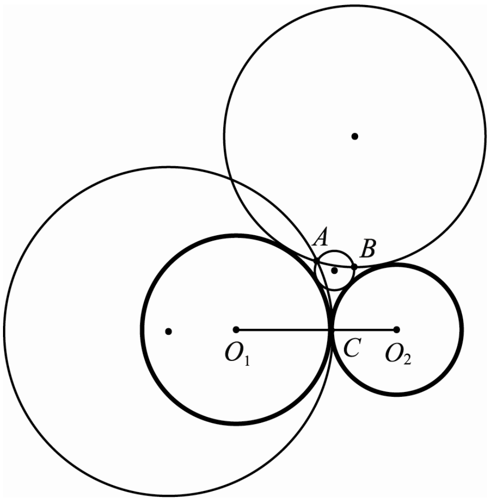


▲圖 48

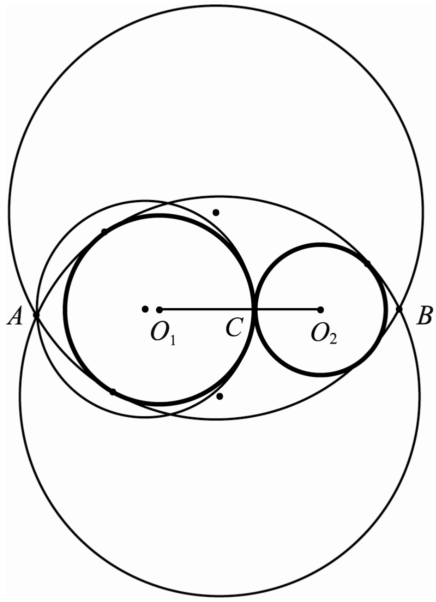
三、 圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 外切，點 A 在兩圓的外部但不在兩圓的連心線上，也不在兩圓的外公切線、內公切線上；設 $r_1 > r_2$ 。

思考問題 34：

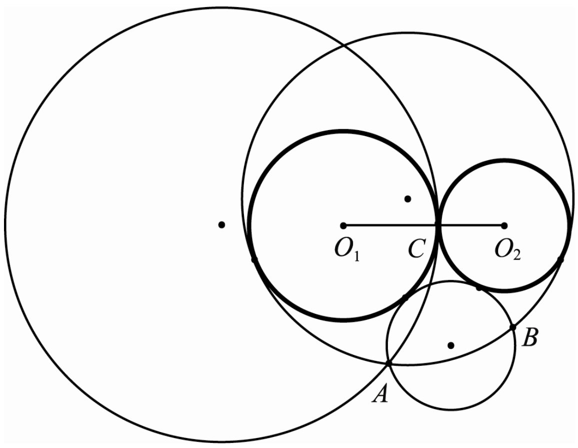
試證：在「點圓圓」問題的第三種情形中，過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 都相切的圓只有三解。其中，與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 都外切或都內切的圓（第一組圓）的作圖法與解的數量，都與第一種情形的同一組圓作圖法與解的數量相同；而且所求兩圓與兩給定圓的相切形式也與第一種情形的同一組圓相同地可分成三種（如圖 49 所示）。至於與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 中之一外切、與另一內切的圓（第二組圓），則只有一解；而且當點 A 與圓心 O_i（ $i=1$ 或 2）位於兩給定圓的內公切線同側時，所求圓必與圓 O_i 內切而與圓 O_{3-i} 外切。（請注意：當圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 外切時，雙曲線 $H(A,O_1;r_1)$ 與雙曲線 $H(A,O_2;r_2)$ 也相切，其公切線就是圖 49 中 $\overline{AC}$ 的垂直平分線。）



(a)



(b)

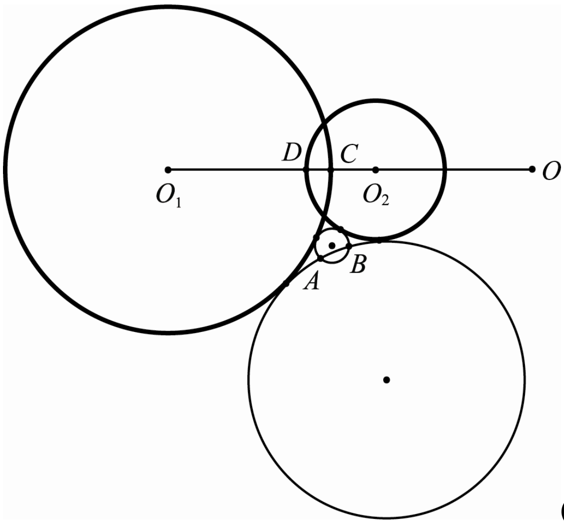


(c) ▲圖 49

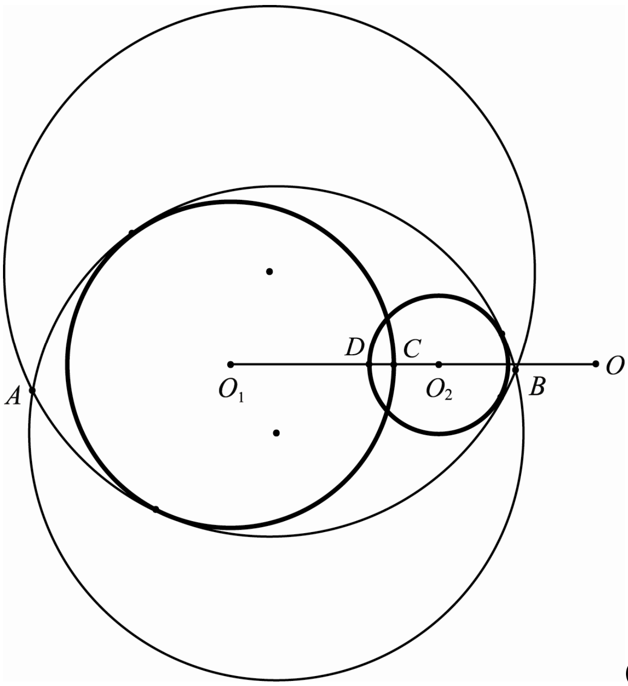
四、 圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 相交於兩點，點 A 在兩圓的外部但不在兩圓的連心線上，也不在兩圓的外公切線上；設 $r_1 > r_2$ 。

思考問題 35：

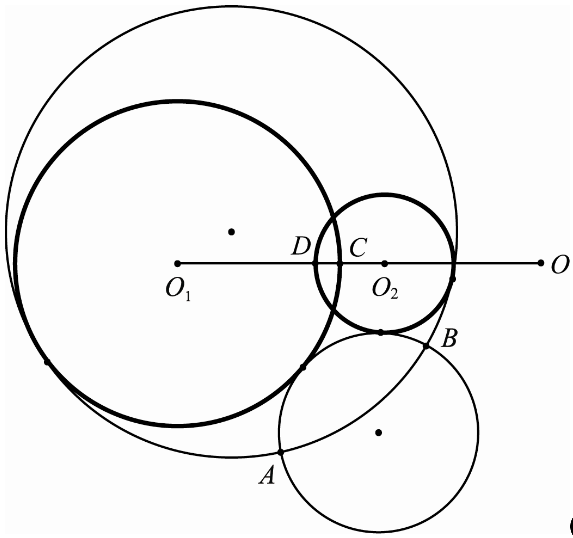
試證：在「點圓圓」問題的第四種情形中，過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 都相切的圓只有二解。其中，與圓 $O_1(r_1)$， $O_2(r_2)$ 都外切或都內切的圓（第一組圓）的作圖法與解的數量，都與第一種情形的同一組圓作圖法與解的數量相同；而且所求兩圓與兩給定圓的相切形式也與第一種情形的同一組圓相同地可分成三種（如圖 50 所示）。至於與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 中之一外切、與另一內切的圓（第二組圓），則都不存在，理由就在於圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 相交於兩點，而且點 A 在兩圓的外部。



(*a*)



(*b*)

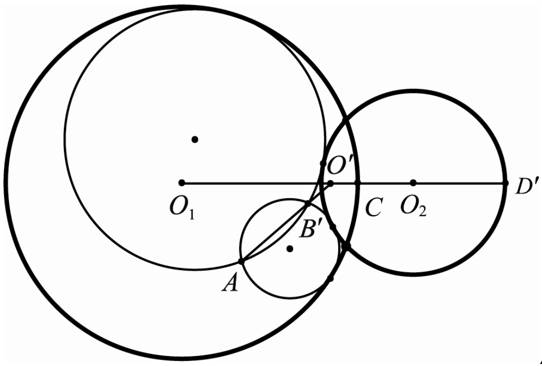


(*c*) ▲圖 50

五、圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 相交於兩點，點 A 在圓 $O_1(r_1)$ 的內部而且在圓 $O_2(r_2)$ 的外部但不在兩圓的連心線上；設 $r_1 > r_2$ 。

思考問題 36：

試證：在「點圓圓」問題的第五種情形中，過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 都相切的圓只有二解，而且所求兩圓都與圓 $O_1(r_1)$ 內切、且都與圓 $O_2(r_2)$ 外切（第二組圓）。至於其圓心則是橢圓 $E(A,O_1;r_1)$ 與雙曲線 $H(A,O_2;r_2)$ 較靠近焦點 A 的一支的交點。

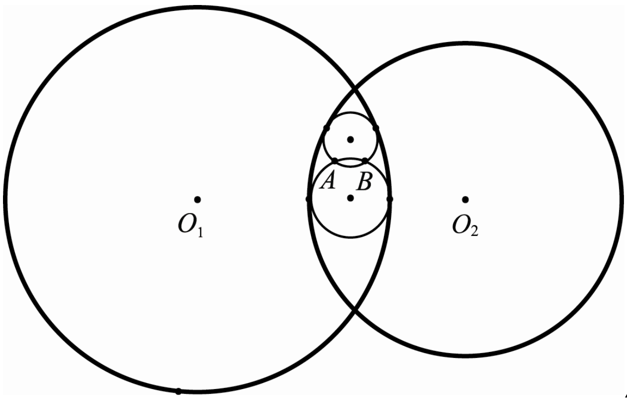


▲圖 51

六、圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 相交於兩點，點 A 在圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 的內部但不在兩圓的連心線上；設 $r_1 > r_2$ 。

思考問題 37：

試證：在「點圓圓」問題的第六種情形中，過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$ ， $O_2(r_2)$ 都相切的圓只有二解，而且所求兩圓都與圓 $O_1(r_1)$ 內切、也都與圓 $O_2(r_2)$ 內切（第一組圓）。至於其圓心則是橢圓 $E(A,O_1;r_1)$ 與橢圓 $E(A,O_2;r_2)$ 的交點。

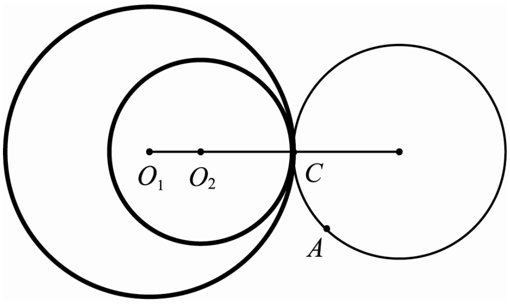


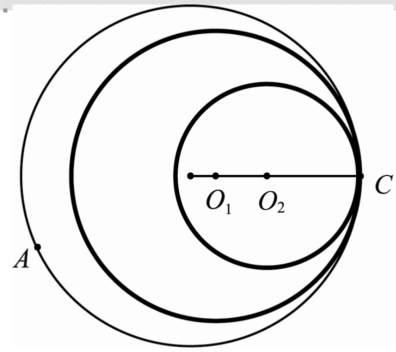
▲圖 52

七、圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 內切，點 A 在兩圓的外部但不在兩圓的連心線上，也不在兩圓的外公切線上；設 $r_1 > r_2$ 。

思考問題 38：

試證：在「點圓圓」問題的第七種情形中，過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 都相切的圓只有一解。當點 A 與兩圓心 O_1，O_2 位於兩給定圓的外公切線同側時，所求圓必與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都內切；當點 A 與兩圓心 O_1，O_2 位於兩給定圓的外公切線異側時，所求圓必與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都外切（如圖 53 所示）。不論內切或外切，所求圓與兩給定圓的切點重合。（請注意：當圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 內切時，雙曲線 $H(A,O_1;r_1)$ 與雙曲線 $H(A,O_2;r_2)$ 也相切，其切點就是所求圓的圓心。）



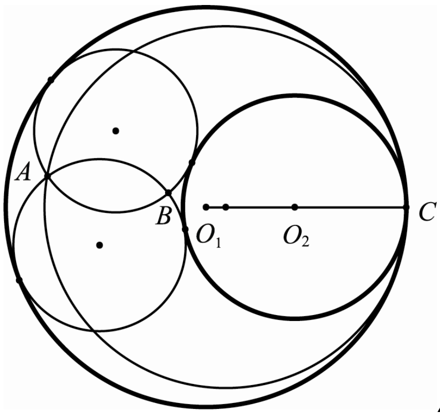


(a) (b) ▲圖 53

八、圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 內切，點 A 在圓 $O_1(r_1)$ 的內部而且在圓 $O_2(r_2)$ 的外部但不在兩圓的連心線上；設 $r_1 > r_2$ 。

思考問題 39：

試證：在「點圓圓」問題的第八種情形中，過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 都相切的圓共有三解。其中，與圓 $O_1(r_1)$ 內切、而與圓 $O_2(r_2)$ 外切的圓（第二組圓）的作圖法與解的數量，都與第一種情形的同一組圓作圖法與解的數量相同。至於與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 都內切的圓（第一組圓），則只有一解；且此所求圓與兩給定圓的切點重合，而其圓心則是橢圓 $E(A,O_1;r_1)$ 與雙曲線 $H(A,O_2;r_2)$ 相切的切點（如圖 54 所示）。

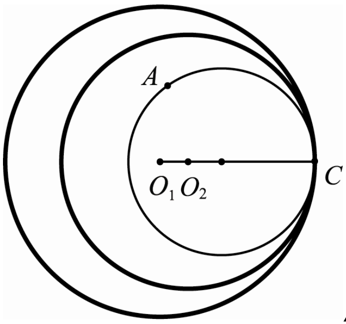


▲圖 54

九、圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 內切，點 A 在圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 的內部但不在兩圓的連心線上；設 $r_1 > r_2$ 。

思考問題 40：

試證：在「點圓圓」問題的第九種情形中，過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$， $O_2(r_2)$ 都相切的圓只有一解，而此所求圓與圓 $O_1(r_1)$、圓 $O_2(r_2)$ 都內切。至於其圓心則是橢圓 $E(A,O_1;r_1)$ 與橢圓 $E(A,O_2;r_2)$ 相切的切點（如圖 55 所示）。

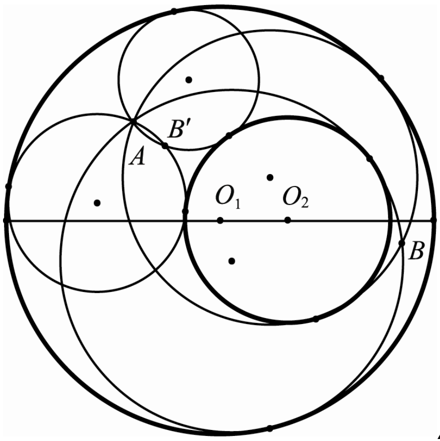


▲圖 55

十、 圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 內離，點 A 在圓 $O_1(r_1)$ 的內部而且在圓 $O_2(r_2)$ 的外部但不在兩圓的連心線上；設 $r_1 > r_2$ 。

思考問題 41：

試證：在「點圓圓」問題的第十種情形中，過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$， $O_2(r_2)$ 都相切的圓共有四解（如圖 56 所示）。其中，與圓 $O_1(r_1)$， $O_2(r_2)$ 都內切的圓（第一組圓）的作圖法與解的數量，都與第一種情形的同一組圓作圖法與解的數量相同；與圓 $O_1(r_1)$ 內切、而與圓 $O_2(r_2)$ 外切的圓（第二組圓）的作圖法與解的數量，也都與第一種情形的同一組圓作圖法與解的數量相同。至於四個所求圓的圓心，則是橢圓 $E(A,O_1;r_1)$ 與雙曲線 $H(A,O_2;r_2)$ 的四個交點。



▲圖 56

在前面十種情形中，我們都只考慮不在兩圓的連心線上，也不在兩圓的外公切線、內公切線上的點 A。當點 A 在這些直線上時，「點圓圓」問題的作圖法與兩組圓的數目，都可能有些不同。我們就「兩圓外離且半徑不相等」分成六種情形。

十一、 圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 外離，點 A 在兩圓的外部且在兩圓的連心線上，但不是兩圓的外公切線、內公切線的交點；設 $r_1 > r_2$ 。

十二、　圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$外離，點A在兩圓的外部且在兩圓的一條外公切線上，但不是兩圓的外公切線交點、且不在兩圓的內公切線上；設$r_1 > r_2$。

十三、　圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$外離，點A在兩圓的外部且在兩圓的一條內公切線上，但不是兩圓的內公切線交點、且不在兩圓的外公切線上；設$r_1 > r_2$。

十四、　圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$外離，點A是兩圓的一外公切線與一內公切線的交點；設$r_1 > r_2$。

十五、　圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$外離，點A是兩圓的外公切線的交點O；設$r_1 > r_2$。

十六、　圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$外離，點A是兩圓的內公切線的交點O'；設$r_1 > r_2$。

思考問題 42：

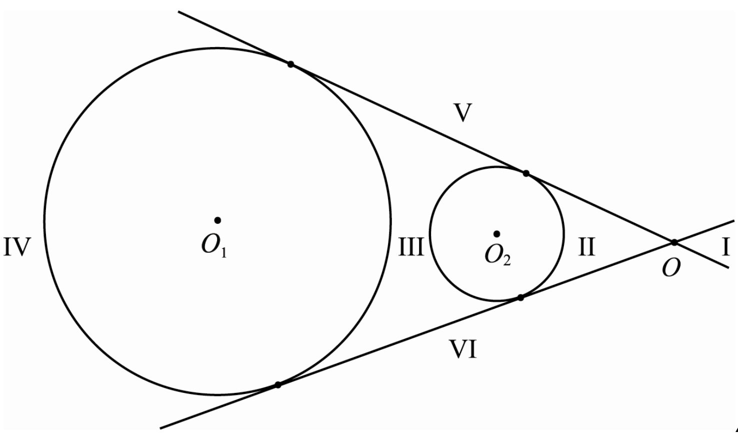
試證：在「點圓圓」問題的第十一種情形至第十六種情形中，過點A且與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$都相切的圓的解數如下表：

	第一組圓解數	第二組圓解數
第十一情形	二	二
第十二情形	一	二
第十三情形	二	一
第十四情形	一	一
第十五情形	零	二
第十六情形	二	零

至於上述各情形中的圓作圖法，與第一種情形同一組圓的作圖法相比較，只有當點A在兩圓的連心線上時（第十一、十五、十六等三種情形），因爲點A, C, D, D'共線，所以點B與點B'的作法不能採用第一種情形同一組圓的作法，而是要根據$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}$與$\overrightarrow{O'A}\times\overrightarrow{O'B'}=\overrightarrow{O'C}\times\overrightarrow{O'D'}$兩等式來分別作出點$B$與點$B'$。

在「點圓圓」問題所作的圓與兩給定圓是外切或內切，這並不是隨機改變的，而是與給定點A的位置有關。我們就第一種情形來說明。

設圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$外離且$r_1 > r_2$，則位於兩圓的外部、且不在兩外公切線上的所有點，被兩圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$及兩外公切線分成六個區域，如圖 57 所示。



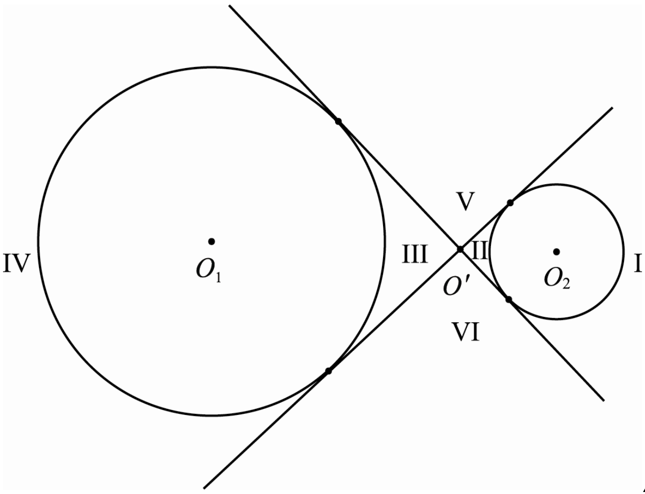
▲圖 57

思考問題 43：

試證：在圖 57 中，當給定點 A 位於其中某區域時，過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 都相切的第一組兩圓與兩給定圓的相切形式如下表所示：

點 A 所屬區域	與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 相切形式
I	兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，兩圓與圓 $O_2(r_2)$ 都外切
II	兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，兩圓與圓 $O_2(r_2)$ 都內切
III	兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，兩圓與圓 $O_2(r_2)$ 都外切
IV	兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，兩圓與圓 $O_2(r_2)$ 都內切
V	一圓與兩給定圓都外切，一圓與兩給定圓都內切
VI	一圓與兩給定圓都外切，一圓與兩給定圓都內切

同理，設圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 外離且 $r_1 > r_2$，則位於兩圓的外部、且不在兩內公切線上的所有點，被兩圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 及兩內公切線分成六個區域，如圖 58 所示。



▲圖 58

思考問題 44：

試證：在圖 58 中，當給定點 A 位於其中某區域時，過點 A 且與圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 都相切的第二組兩圓與兩給定圓的相切形式如下表所示：

點 A 所屬區域	與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 相切形式
I	兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，兩圓與圓 $O_2(r_2)$ 都內切
II	兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，兩圓與圓 $O_2(r_2)$ 都外切
III	兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都外切，兩圓與圓 $O_2(r_2)$ 都內切
IV	兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 都內切，兩圓與圓 $O_2(r_2)$ 都外切
V	一圓與圓 $O_1(r_1)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切， 一圓與圓 $O_1(r_1)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切
VI	一圓與圓 $O_1(r_1)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切， 一圓與圓 $O_1(r_1)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切

專欄 動手玩數學

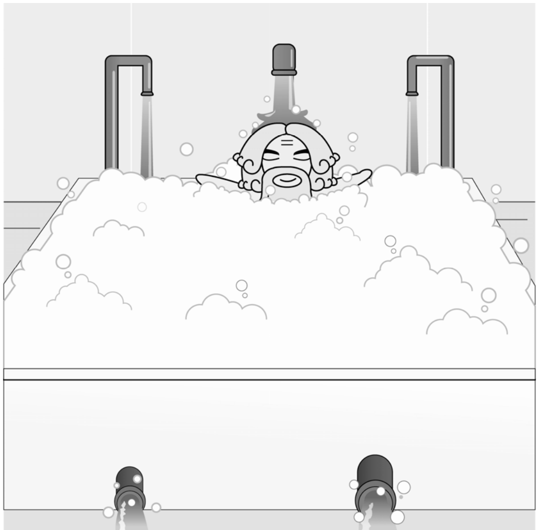
許志農／臺灣師範大學數學系

遊戲 57

☆☆☆☆

小型泳池有編號①②③④⑤的五支水管，有的是注水入泳池的，有的是將泳池的水排掉的。下表是所開的水管與泳池注滿水所需的時間（小時）：

水管編號	①②	②③	③④	④⑤	⑤①
注滿時間	3	6	12	4	1



(1) 當五支水管同時開啟時，需要幾個小時才能讓泳池注滿水。

(2) 確認哪些水管是注水的，哪些是排水的。

〔玩鎖・玩索〕

這是大陸羅增儒教授所出的一道有趣問題，本人潤飾了數據，讓問題好計算。

遊戲 58

☆☆

古印度的宗教典籍中，有些會教導信眾如何建造塔、神壇、廟宇…等等。當中記載了兩道問題：

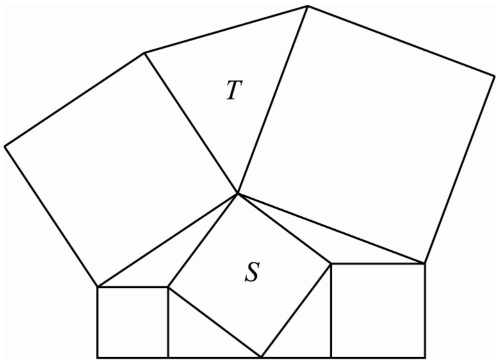
(1) 已知兩個正方形，求作一正方形，面積等於那兩個正方形的和。

(2) 已知兩個正方形，求作一正方形，面積等於那兩個正方形的差。

〔玩鎖・玩索〕

建築需要精準的構圖，否則容易倒塌，幾何上的尺規作圖剛好符合這方面的需求。想想看，哪一個幾何定理可以幫得上忙？

不只在印度，東方日本的神廟建築也隱藏著美妙的幾何概念，下圖是日本神廟的平面圖，其中T所在的三角形面積與S所在的正方形面積是相同的。



遊戲 59

☆☆

甲、乙、丙三位駕駛人涉及一件三車連環車禍，而車禍係由其中一車所引起。現場三人筆錄如下：

甲說：「我沒有引起車禍，是乙引起的。」

乙說：「我沒有引起車禍，是丙引起的。」

丙說：「乙沒有引起車禍，是甲引起的。」

今有一位證人提供情報說：「三人中有一位兩句話都是真實的；有一位一句真話，一句假話；還有一位兩句話都是假的。」根據這些情報，判定車禍肇事者是哪一位。

〔玩鎖・玩索〕

這是一道推理試題，出自國立臺灣師範大學九十三學年度的轉系考試題。邏輯推理試題沒有一定的解題方法，大致上可以畫圖或以窮舉的方法得到答案。

遊戲 60

☆☆☆

兩個人輪流在圓形桌面上擺硬幣，每次擺一枚，硬幣不能互相重疊，也不能讓硬幣有一部分在桌面的邊緣以外。這樣擺過充分多次以後，誰先擺不下硬幣就算輸。

試問：誰有必勝的策略。

〔玩鎖・玩索〕

這是1964年福州市中學生數學競賽試題。它是一道遊戲題，考驗學生將數學概念運用在玩遊戲上，或者說如何挖掘遊戲背後的數學道理。

動手玩數學~破解秘笈 第14期

遊戲 53

(1) $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle DAB=90^\circ$
（正方形 $ABCD$ 的一個內角）。

(2) 利用大圓弧上的圓心角等於圓周角的兩倍，得 $\angle 4=2\angle ACF$。又 $\overline{AD}$ 與大圓弧相切於 A 點，得 $\angle ACF=\angle DAF=\angle 1$。故 $\angle 4=2\angle 1$。

(3) 因爲 $\overline{AB}$ 爲小弧所在圓的直徑，所以 $\angle AEB=90^\circ$，即 $\angle 3+\angle 4=90^\circ$。

解(1)(2)及(3)所得的等式，得

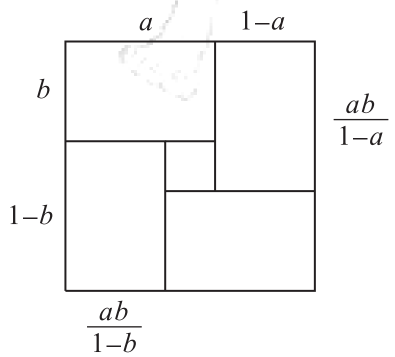
$$\begin{cases}\angle 1+\angle 2+\angle 3=90^\circ\\ \angle 4=2\angle 1\\ \angle 3+\angle 4=90^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\angle 1+\angle 2+\angle 3=90^\circ\\ \angle 3+2\angle 1=90^\circ\end{cases}$$

將最後兩式相減，得到 $\angle 1=\angle 2$。

遊戲 54

設單位正方形的左上矩形之邊長爲 a 與 b，利用外圍矩形的面積相等，可以推得它們的邊長如下圖所示：



根據上圖知道：外圍右下矩形的邊長爲

$$1-\frac{ab}{1-b},1-\frac{ab}{1-a}\ .$$

因爲此矩形的面積爲 ab，所以

$$\left(1-\frac{ab}{1-a}\right)\left(1-\frac{ab}{1-b}\right)=ab\ .$$

整理得到

$$(a+b-1)(2ab-1)=0\ ,$$

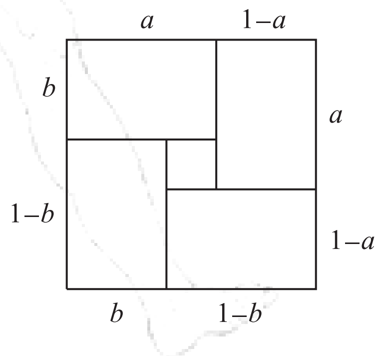
得到 $a+b=1$ 或 $ab=\frac{1}{2}$。因爲四個外圍矩形的面積都是 ab，又它們都在單位正方形內，所以

$$4ab\le 1\ ,$$

即 $ab\le\frac{1}{4}$，也就是說，$ab=\frac{1}{2}$ 不合。因此

$$a+b=1\ .$$

由 $a+b=1$ 得到四個外圍矩形的邊長如下：



從上圖可知：內部的矩形爲邊長 $|a-b|$ 的正方形。

遊戲 55

設一共有 x 對藍、綠變色龍變爲紅色變色龍；y 對紅、綠變色龍變爲藍色變色龍；z 對紅、藍變色龍變爲綠色變色龍。根據題意，最後會

有

$13+2x-y-z$ 隻紅色變色龍；

$15-x+2y-z$ 隻藍色變色龍；

$17-x-y+2z$ 隻綠色變色龍。

若欲讓最後所有的變色龍全爲紅色，則 x, y, z 必須滿足

$$\begin{cases} 13+2x-y-z=45 \\ 15-x+2y-z=0 \\ 17-x-y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y-z=32 \\ x-2y+z=15 \\ x+y-2z=17 \end{cases}$$

將前兩式相加，得

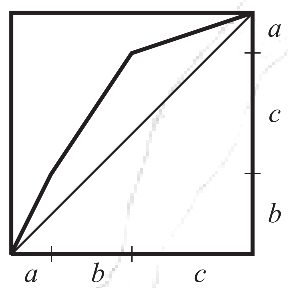
$$3(x-y)=47,$$

此與 x, y 都是整數矛盾。

同理，另外兩種情形也都得到矛盾。故所有的變色龍無法都變成同一種顏色。

$\boxed{\text{遊戲 56}}$

如下圖所示：



斜對角線的長度爲 $\sqrt{2}(a+b+c)$，而粗折線的長度爲 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$ 。根據折線比直線長的道理，知道

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c).$$