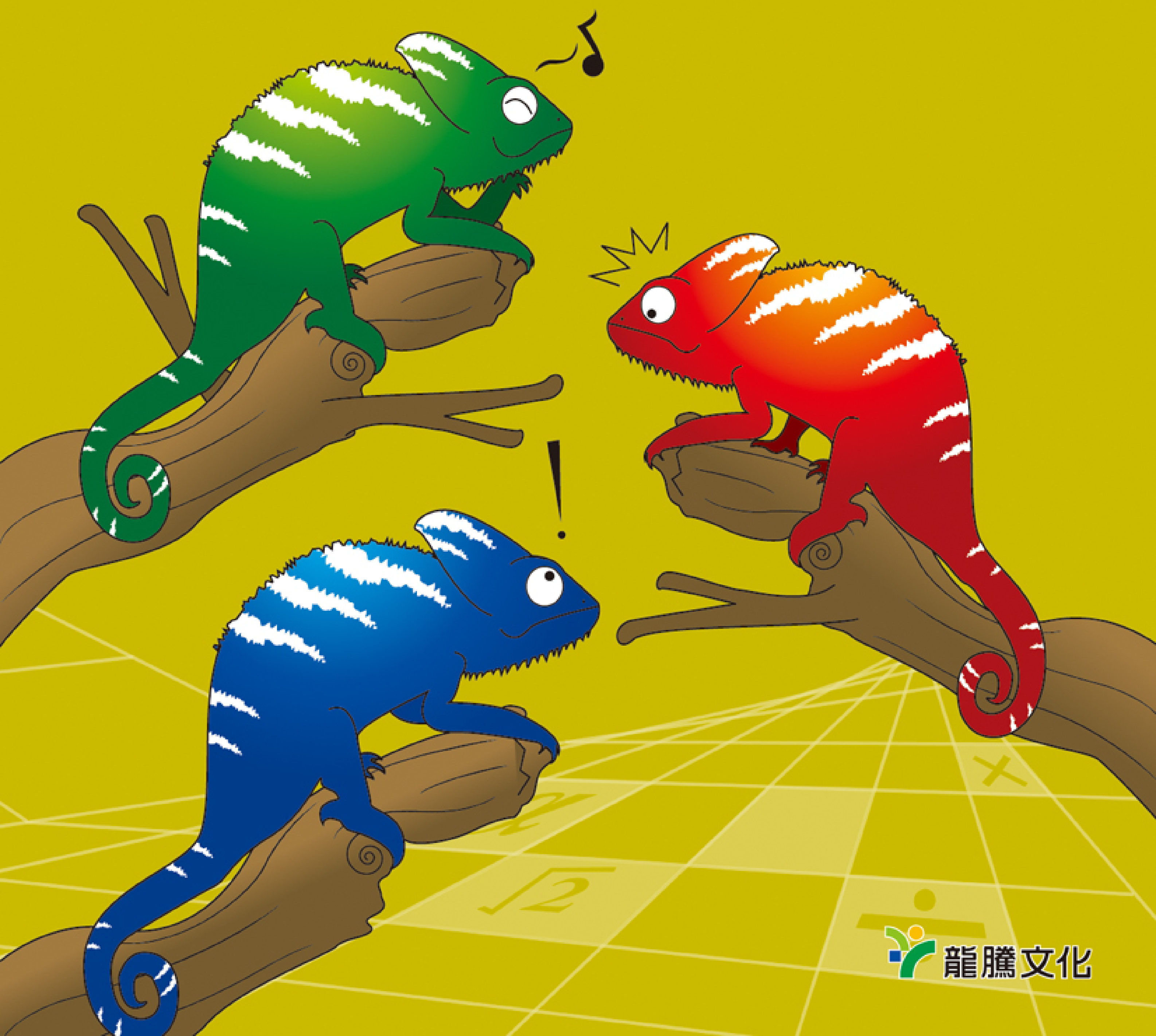
龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第14刊



龍騰文化

編輯室墨記

在高中課程裡有兩個很重要的不等式證明：算幾不等式、柯西不等式。在算幾不等式中：$n=2, \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，有一個漂亮的無言證明；那麼柯西不等式呢？就讓黃傳紘老師告訴你。

高中數學微積分教材已處理，三次函數的圖形及三次方程式實根的判別問題：

當三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 有兩個相異臨界點時（即判別式 $b^2-3ac>0$ 時），
若 $f(x)=0$ 有三個相異實根，則函數 $f(x)$ 在兩臨界點的值異號；反之，
若函數 $f(x)$ 在兩臨界點的值異號，則 $f(x)=0$ 有三個相異實根。

而「三次方程式根的行列式判別」文中葉善雲老師將用行列式的方法，進一步探討三次方程式根的判別。

何謂類比？查一下維基百科：類比或類推是一種將特定事物所附帶的訊息轉移到其他特定事物之上的認知過程，且兩者不一定有實質上的同源性，其類比也不見得「合理」。在99課程中，高一上有Lagrange插值多項式，Lagrange插值法與中國餘數定理有什麼樣的類比關係？讓江慶昆老師告訴你。

延續天馬行空的想法，李維昌老師以直線參數式與克拉瑪公式，來探求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標的公式解法；並以另類的方法來證明對數的一些性質。

想提升自己的數學能力，你就不能錯過「臺北縣99學年度縣立高中職數學科競賽試題」。

島上三種不同顏色的變色龍會全部變成同一種顏色嗎？動手玩數學專欄中告訴你如何用漂亮、簡潔的方法解析幾何題目。

發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
副總編輯：陳美吟
執行編輯：莊莉錚
美術編輯：彭文君
發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248新北市五股區五權七路1號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2299-5311
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2011/03/15
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

龍騰數亦優

2011.03 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

柯西不等式 —

一個無言證明

黃傳紘／國立嘉義高中退休教師

※ 引言 》

在高中的課程裡有兩個很重要的不等式證明：一個是算幾不等式，另一個是柯西不等式。

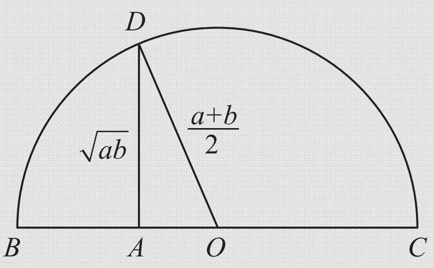
在 $n=2$ 的算幾不等式：$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ，有一個漂亮的無言證明。

如圖，是一個以 $\overline{BC}$ 爲直徑的半圓，O 爲圓心，

設 $\overline{AB}=a,\overline{AC}=b$ ，則 $\overline{AD}=\sqrt{ab},\overline{OD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{a+b}{2}$ ，

由直角三角形斜邊大於任一股，容易看出成立。

＊註：由 $\triangle ABD\sim\triangle ADC$ 可證出 $\overline{AD}=\sqrt{ab}$ 。



因此，引發我想柯西不等式在 $n=2$ 是否也有類似的無言證明。

※ 內文 》

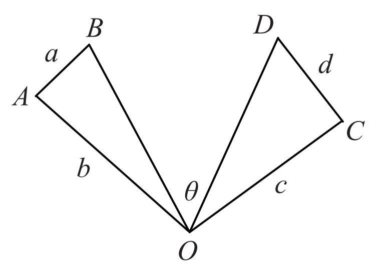
首先 $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq\left(ac+bd\right)^2$ 化成 $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\geq\left|ac+bd\right|$ ，因而想到

$\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\geq\dfrac{1}{2}\left|ac+bd\right|$ ，此不是跟面積有關係嗎？

如圖，直角 $\triangle OAB$ ，直角 $\triangle OCD$ ，

設 $\overline{AB}=a,\overline{OA}=b,\overline{OC}=c,\overline{CD}=d$ ，

則 $\overline{OB}=\sqrt{a^2+b^2},\overline{OD}=\sqrt{c^2+d^2}$ ，

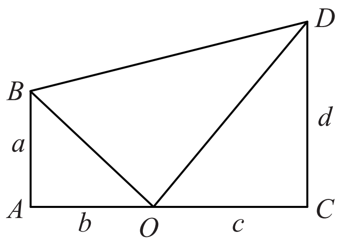


$\triangle OBD$ 的面積爲 $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta$ ，其中 $\theta=\angle BOD$ ，

在此比較麻煩的是 $\dfrac{1}{2}\left|ac+bd\right|$ ，

但 $\dfrac{1}{2}\left|ac+bd\right|$ 的最大值是 $\triangle BOD$ 爲直角三角形時。

因而想到右圖，此時四邊形 $ABDC$ 是梯形，



$\triangle BOD$ 的面積＝梯形 $ABDC-\left(\Delta OAB+\Delta OCD\right)$，

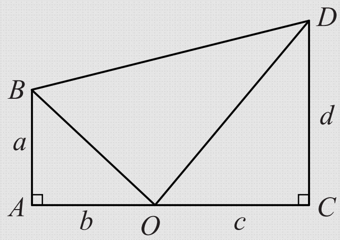
恰好

$\triangle BOD$ 的面積$=\frac{1}{2}\left(a+d\right)\left(b+c\right)-\frac{1}{2}\left(ab+cd\right)=\frac{1}{2}\left(ac+bd\right)$。

故而修正如下：

柯西不等式的一個無言證明：

如圖，設 $\overline{AB}=a,\overline{OA}=b,\overline{OC}=c,\overline{CD}=d$ ，



$\angle BAO=90°$，$\angle OCD=90°$，

$\Delta BOD=\frac{1}{2}\left(a+d\right)\left(b+c\right)-\frac{1}{2}\left(ab+cd\right)=\frac{1}{2}\left(ac+bd\right)$，

又 $\Delta BOD\le\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}(ac+bd)\le\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ ，

即 $\left(ac+bd\right)^2\le\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ ，

等號成立時 $\triangle OAB\sim\triangle DCO\Leftrightarrow a:c=b:d$ 。

三次方程式根的行列式判別

葉善雲／台北市東山高中

＊＊ 摘要

高中數學微積分教材已處理三次函數的圖形及三次方程式實根的判別問題：

當三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 有兩個相異臨界點時（即判別式 $b^2-3ac>0$ 時），
若 $f(x)=0$ 有三個相異實根，則函數 $f(x)$ 在兩臨界點的值異號；反之，
若函數 $f(x)$ 在兩臨界點的值異號，則 $f(x)=0$ 有三個相異實根。

本文將用行列式的方法，進一步探討三次方程式根的判別。

＊＊內文

三次函數 $f(x)$ 在兩臨界點 α,β 的值異號，意謂函數值的乘積小於 0，即 $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$，但要如何求出函數「在臨界點之值的乘積」呢？底下，我們考慮多項式函數 $f(x)$ 及其導函數 $f'(x)$，並求出 $f(x)$ 除以 $f'(x)$ 的餘式，嘗試連結它們的關聯，初步得到下面的結論：

引理 1：
n 次多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$（其中 $n\ge 2$）除以 $n-1$ 次多項式 $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$ 的餘式為

$$r(x)=\frac{1}{(b_{n-1})^2}\cdot\left(\Lambda_1x^{n-2}+\Lambda_2x^{n-3}+\cdots+\Lambda_{n-2}x+\Lambda_{n-1}\right),$$

其中 Λ_k 為三階行列式 $\begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} & 0 \\ a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_{n-1-k} & b_{n-2-k} & b_{n-1-k}\end{vmatrix}$，$1\le k\le n-2$，且 $\Lambda_{n-1}=\begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} & 0 \\ a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_0 & 0 & b_0\end{vmatrix}$。

證明 》
餘式 $r(x)$ 的 x^{n-2} 項係數為

$$\frac{1}{(b_{n-1})^2}\cdot\left(a_{n-2}\cdot(b_{n-1})^2-a_n\cdot b_{n-3}\cdot b_{n-1}+b_{n-2}\cdot\begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} \\ a_{n-1} & b_{n-2}\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{(b_{n-1})^2}\cdot\begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} & 0 \\ a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-2}\end{vmatrix};$$

當 $2\le k\le n-2$ 時，餘式 $r(x)$ 的 x^{n-1-k} 項係數為

$$\frac{1}{(b_{n-1})^2}\cdot\left(a_{n-1-k}\cdot(b_{n-1})^2-a_n\cdot b_{n-2-k}\cdot b_{n-1}+b_{n-1-k}\cdot\begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} \\ a_{n-1} & b_{n-2}\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{(b_{n-1})^2}\cdot\begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} & 0 \\ a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_{n-1-k} & b_{n-2-k} & b_{n-1-k}\end{vmatrix};$$

而餘式 $r(x)$ 的常數項爲

$$\frac{1}{\left(b_{n-1}\right)^2}\cdot\left(a_0\cdot\left(b_{n-1}\right)^2+0+b_0\cdot\begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} \\ a_{n-1} & b_{n-2}\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{\left(b_{n-1}\right)^2}\cdot\begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} & 0 \\ a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_0 & 0 & b_0\end{vmatrix}\text{。}$$

說明 》

引理中之 Λ_k 爲下列表達式第一列、第二列與第 $k+2$ 列所成之三階行列式：

$$\begin{pmatrix} a_n & b_{n-1} & 0 \\ a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_0 & 0 & b_0 \end{pmatrix}\text{，即 }\Lambda_k=\begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} & 0 \\ a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_{n-1-k} & b_{n-2-k} & b_{n-1-k}\end{vmatrix}\text{，其中 }1\le k\le n-1\text{ 且 }b_{-1}=0\text{ 。}$$

推論 》

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$（其中 $n\ge 2$ ）爲 n 次多項式函數，則 $f(x)$ 除以其導函數 $f'(x)=na_nx^{n-1}+\left(n-1\right)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$ 的餘式 $r(x)$ 爲

$$r(x)=\frac{1}{n^2a_n}\cdot\left(\Delta_1x^{n-2}+\Delta_2x^{n-3}+\cdots+\Delta_{n-2}x+\Delta_{n-1}\right)\text{，}$$

其中 Δ_k（ $1\le k\le n-1$ ）爲下列表達式第一列與第 $k+1$ 列所成之二階行列式：

$$\begin{pmatrix} na_n & a_{n-1} \\ \left(n-1\right)a_{n-1} & 2a_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ 2a_2 & \left(n-1\right)a_1 \\ a_1 & na_0 \end{pmatrix}\text{，即 }\Delta_k=\begin{vmatrix} na_n & a_{n-1} \\ \left(n-k\right)a_{n-k} & \left(k+1\right)a_{n-1-k}\end{vmatrix}\text{，}\ 1\le k\le n-1$$

，此處表達式之第一行爲導函數 $f'(x)$ 的係數且第二行爲函數 $f(x)$ 係數的變化（第二行第 r 項是將 $f(x)$ 之 x^{n-r} 項係數 a_{n-r} 改爲 ra_{n-r} ）。

證明 》

由上面的引理得 $f(x)$ 除以其導函數 $f'(x)$ 的餘式 $r(x)$ 爲

$$r(x)=\frac{1}{\left(na_n\right)^2}\cdot\left(\Lambda_1x^{n-2}+\Lambda_2x^{n-3}+\cdots+\Lambda_{n-2}x+\Lambda_{n-1}\right)\text{，}$$

其中Λ_k為三階行列式$\begin{vmatrix} a_n & na_n & 0 \\ a_{n-1} & (n-1)a_{n-1} & na_n \\ a_{n-1-k} & (n-1-k)a_{n-1-k} & (n-k)a_{n-k} \end{vmatrix}$，$1 \le k \le n-1$。

而此處Λ_k可化簡為$\Lambda_k = a_n \cdot \begin{vmatrix} na_n & a_{n-1} \\ (n-k)a_{n-k} & (k+1)a_{n-1-k} \end{vmatrix} = a_n \cdot \Delta_k$，$1 \le k \le n-1$，於是得餘式

$r(x) = \dfrac{1}{n^2 a_n} \cdot \left(\Delta_1 x^{n-2} + \Delta_2 x^{n-3} + \cdots + \Delta_{n-2} x + \Delta_{n-1}\right)$。

引理 2：

設$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$（其中$n \ge 3$）為$n$次多項式函數，且$f(x)$除以其導函數$f'(x)$的餘式為$r(x) = \dfrac{1}{n^2 a_n} \cdot \left(\Delta_1 x^{n-2} + \Delta_2 x^{n-3} + \cdots + \Delta_{n-2} x + \Delta_{n-1}\right)$，若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$為$f'(x) = 0$的根，$\Delta_1 \ne 0$且$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-2}$為$r(x) = 0$的根，則

$$f(\alpha_1) \cdot f(\alpha_2) \cdot \cdots \cdot f(\alpha_{n-1}) = \frac{(\Delta_1)^{n-1}}{n^{3n-4} \cdot a_n^{2n-3}} \cdot f'(\beta_1) \cdot f'(\beta_2) \cdot \cdots \cdot f'(\beta_{n-2})\text{。}$$

證明》

設$\begin{cases} f(x) = f'(x) \cdot q_1(x) + r(x) \\ f'(x) = r(x) \cdot q_2(x) + s(x) \end{cases}$且$\begin{cases} f'(x) = na_n \cdot (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n-1}) \\ r(x) = \dfrac{\Delta_1}{n^2 a_n} \cdot (x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_{n-2}) \end{cases}$，則

$$\begin{aligned}
& f(\alpha_1) \cdot f(\alpha_2) \cdot \cdots \cdot f(\alpha_{n-1}) = r(\alpha_1) \cdot r(\alpha_2) \cdot \cdots \cdot r(\alpha_{n-1}) \\
&= \frac{(\Delta_1)^{n-1}}{(n^2 a_n)^{n-1}} \cdot \left[(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\cdots(\alpha_1-\beta_{n-2})\right] \cdot \cdots \cdot \left[(\alpha_{n-1}-\beta_1)(\alpha_{n-1}-\beta_2)\cdots(\alpha_{n-1}-\beta_{n-2})\right] \\
&= \frac{(\Delta_1)^{n-1}}{(n^2 a_n)^{n-1}} \cdot \left[(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_1)\cdots(\alpha_{n-1}-\beta_1)\right] \cdot \cdots \cdot \left[(\alpha_1-\beta_{n-2})(\alpha_2-\beta_{n-2})\cdots(\alpha_{n-1}-\beta_{n-2})\right] \\
&= \frac{(\Delta_1)^{n-1}}{(n^2 a_n)^{n-1}} \cdot \left[(\beta_1-\alpha_1)(\beta_1-\alpha_2)\cdots(\beta_1-\alpha_{n-1})\right] \cdot \cdots \cdot \left[(\beta_{n-2}-\alpha_1)(\beta_{n-2}-\alpha_2)\cdots(\beta_{n-2}-\alpha_{n-1})\right] \\
&= \frac{(\Delta_1)^{n-1}}{(n^2 a_n)^{n-1}} \cdot \frac{1}{(na_n)^{n-2}} \cdot f'(\beta_1) \cdot f'(\beta_2) \cdot \cdots \cdot f'(\beta_{n-2}) \\
&= \frac{(\Delta_1)^{n-1}}{n^{3n-4} \cdot a_n^{2n-3}} \cdot f'(\beta_1) \cdot f'(\beta_2) \cdot \cdots \cdot f'(\beta_{n-2}).
\end{aligned}$$

特例

設$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$為三次多項式函數，且$f'(x)$為其導函數，則$f(x)$除以$f'(x)$的

餘式爲$\frac{1}{9a}\cdot\left(\Delta_1 x+\Delta_2\right)$，其中$\Delta_k$（$k=1,2$）爲下列表達式第一列與第$k+1$列所成之二階行列式：

$$\begin{pmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\\ c & 3d\end{pmatrix}\text{，即}\Delta_1=\begin{vmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\end{vmatrix}=-2\left(b^2-3ac\right)\text{且}\Delta_2=\begin{vmatrix}3a & b\\ c & 3d\end{vmatrix}=9ad-bc\text{。}$$

再則，若α,β爲二次方程式$f'(x)=0$的根，則

(1) 當$\Delta_1\neq 0$時，$f(\alpha)\cdot f(\beta)=\frac{\left(\Delta_1\right)^2}{243a^3}\cdot f'\left(-\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)$。

(2) 當$\Delta_1=0$時，$f(\alpha)\cdot f(\beta)=\frac{\Delta_2}{9a}\cdot\frac{\Delta_2}{9a}=\frac{\left(\Delta_2\right)^2}{81a^2}$。

底下，我們將函數值的乘積用行列式的形式表達出來。

引理 3：

設$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$爲三次多項式函數，$f'(x)$爲其導函數，$f(x)$除以$f'(x)$的餘式爲$\frac{1}{9a}\cdot\left(\Delta_1 x+\Delta_2\right)$。若$\alpha,\beta$爲二次方程式$f'(x)=0$的根，則

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)=\frac{1}{243a^3}\cdot\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}\text{。}$$

證明 》

設$f(x)=f'(x)\cdot q_1(x)+\frac{1}{9a}\cdot\left(\Delta_1 x+\Delta_2\right)$，$f'(x)=\frac{1}{9a}\cdot\left(\Delta_1 x+\Delta_2\right)\cdot q_2(x)+R$，就$\Delta_1$是否爲 0，分別討論。

(1) 當$\Delta_1\neq 0$時，由前面的引理 1，得$f'(x)=3ax^2+2bx+c$除以$\frac{1}{9a}\cdot\left(\Delta_1 x+\Delta_2\right)$的餘式爲

$$R=\frac{1}{\left(\Delta_1\right)^2}\cdot\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}\text{；另一方面，由餘式定理知}f'\left(-\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)=R\text{。}$$

故再由前面的引理 2 及特例，得

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)=\frac{\left(\Delta_1\right)^2}{243a^3}\cdot f'\left(-\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)=\frac{\left(\Delta_1\right)^2}{243a^3}\cdot R=\frac{1}{243a^3}\cdot\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}\text{。}$$

(2) 當$\Delta_1=0$時，此時$f(x)=f'(x)\cdot q_1(x)+\dfrac{\Delta_2}{9a}$，於是

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)=\left(\frac{\Delta_2}{9a}\right)^2=\frac{1}{243a^3}\cdot 3a\cdot\left(\Delta_2\right)^2=\frac{1}{243a^3}\cdot\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}。$$

配合三次函數的圖形，我們有下面的結論：

定理：（三次方程式根的行列式判別）

設$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$為實係數三次多項式，Δ_k（$k=1,2$）為下列表達式第一列與第$k+1$列所成之二階行列式：

$$\begin{pmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\\ c & 3d\end{pmatrix}，即\Delta_1=\begin{vmatrix}3a & b\\ 2b & 2c\end{vmatrix}=6ac-2b^2 且 \Delta_2=\begin{vmatrix}3a & b\\ c & 3d\end{vmatrix}=9ad-bc，$$

則我們有下列方程式實根個數的判別：

(1) $f(x)=0$有三個相異實根 $\Leftrightarrow$ $a\cdot\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}<0$。

(2) $f(x)=0$有重根（二或三重根） $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}=0$。

(3) $f(x)=0$有一個實根及兩個虛根 $\Leftrightarrow$ $a\cdot\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}>0$。

證明》

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，並設α,β為$f'(x)=0$的根。

(1) 由$f(x)=0$有三個相異實根 $\Leftrightarrow$ $f(\alpha)f(\beta)<0$，由前面的引理 3，得

$$f(x)=0 有三個相異實根 \Leftrightarrow a\cdot\begin{vmatrix}3a & \Delta_1 & 0\\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1\\ c & 0 & \Delta_2\end{vmatrix}<0。$$

(2)、(3) 理由同(1)。

底下，我們舉些實例（實係數方程式）來說明上述定理的用法。

例題 1：$x^3+Ax+B=0$ 有三個相異實根 $\Leftrightarrow$ $4A^3+27B^2<0$。

Sol 令 $f(x)=x^3+0x^2+Ax+B$， $f'(x)=3x^2+0x+A$，

由 Δ_k 的表達式：$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2A \\ A & 3B \end{pmatrix}$，得 $\Delta_1=6A$， $\Delta_2=9B$，

由判別式 $\begin{vmatrix} 3 & 6A & 0 \\ 0 & 9B & 6A \\ A & 0 & 9B \end{vmatrix}<0$，得 $9\cdot\left(27B^2+4A^3\right)<0$，

故 $x^3+Ax+B=0$ 有三個相異實根 $\Leftrightarrow$ $4A^3+27B^2<0$。

例題 2：設 $x^3+2x^2-x+k=0$ 有三個相異實根，求 k 的範圍。

Sol 令 $f(x)=x^3+2x^2-x+k$， $f'(x)=3x^2+4x-1$，

由 Δ_k 的表達式：$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \\ -1 & 3k \end{pmatrix}$，得 $\Delta_1=-14$， $\Delta_2=9k+2$，

由判別式 $\begin{vmatrix} 3 & -14 & 0 \\ 4 & 9k+2 & -14 \\ -1 & 0 & 9k+2 \end{vmatrix}<0$，得

$27k^2+68k-8<0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-34-14\sqrt{7}}{27}<k<\dfrac{-34+14\sqrt{7}}{27}$。

在上面的例題 2 中，函數 $f(x)=x^3+2x^2-x+k$ 的臨界點為 $\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$（並非如教科書舉例臨界點為有理數般簡易），此時 $f\left(\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)$， $f\left(\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)$ 不易計算；另一方面，也可以透過平移的方法將 $f(x)$ 化成形如例題 1（缺平方項）的形式

$f(x)=\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^3-\dfrac{7}{3}\left(x+\dfrac{2}{3}\right)+k+\dfrac{34}{27}$，然後利用例題 1 的結果求解。

例題 3：設 $x^3-3x^2+kx-1=0$ 有三個相異實根，求 k 的範圍。

Sol 令 $f(x)=x^3-3x^2+kx-1$， $f'(x)=3x^2-6x+k$，

由Δ_k的表達式：$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 2k \\ k & -3 \end{pmatrix}$，得$\Delta_1 = 6\cdot\left(k-3\right)$，$\Delta_2 = 3\cdot\left(k-3\right)$，

由判別式$\begin{vmatrix} 3 & 6\cdot\left(k-3\right) & 0 \\ -6 & 3\cdot\left(k-3\right) & 6\cdot\left(k-3\right) \\ k & 0 & 3\cdot\left(k-3\right) \end{vmatrix} = 9\left(k-3\right)^2\cdot\left(4k+15\right) < 0$，得$k < -\dfrac{15}{4}$。

關於底下例題 4，一般的解題步驟如下：

(1) 畫出三次函數$f(x) = x^3 - 8x^2 - 6$的圖形。

(2) 求出過原點且與$f(x) = x^3 - 8x^2 - 6$圖形相切的直線（有三條）。

(3) 由三次函數圖形與上述切線判斷k值的範圍。

在高中教學現場，筆者吃足苦頭，現在有了行列式判別，終於可以避開函數作圖來處理底下問題。

例題 4：設$x^3 - 8x^2 - kx - 6 = 0$有三個相異實根，求k的範圍。

Sol 令$f(x) = x^3 - 8x^2 - kx - 6$，$f'(x) = 3x^2 - 16x - k$，

由Δ_k的表達式：$\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -16 & -2k \\ -k & -18 \end{pmatrix}$，得$\Delta_1 = -2\cdot\left(3k+64\right)$，$\Delta_2 = -\left(8k+54\right)$，

由判別式$\begin{vmatrix} 3 & -2\cdot\left(3k+64\right) & 0 \\ -16 & -2\cdot\left(4k+27\right) & -2\cdot\left(3k+64\right) \\ -k & 0 & -2\cdot\left(4k+27\right) \end{vmatrix} < 0$，得

$$\left(-2\right)^2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3k+64 & 0 \\ -16 & 4k+27 & 3k+64 \\ -\left(k+13\right) & 7\cdot\left(k+13\right) & 7\cdot\left(k+13\right) \end{vmatrix}$$

$$= -4\cdot\left(k+13\right)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3k+64 & 0 \\ -16 & 4k+27 & 3k+64 \\ 1 & -7 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= -36\cdot\left(k+13\right)\cdot\left(k^2+3k-255\right) < 0,$$

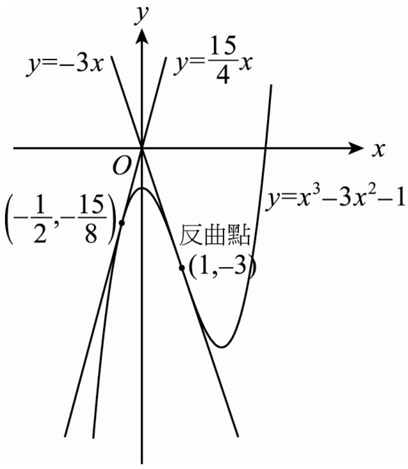
即$\left(k+13\right)\cdot\left(k^2+3k-255\right) > 0$，解得$\dfrac{-3-7\sqrt{21}}{2} < k < -13$或$k > \dfrac{-3+7\sqrt{21}}{2}$。

故若$x^3 - 8x^2 - kx - 6 = 0$有三個相異實根，則$\dfrac{-3-7\sqrt{21}}{2} < k < -13$或$k > \dfrac{-3+7\sqrt{21}}{2}$。

上面例題 3、4 的顯著差異為「Δ_1, Δ_2的比值是否為常數」，其幾何意義可解讀為

函數 $f(x)=ax^3+bx^2+kx+d$ （a,b,d 為定數）的圖形在其反曲點的切線是否通過原點。

在例題 3 中，過原點與函數 $y=x^3-3x^2-1$圖形相切的直線如下圖，



例題 5：設方程式$x^3+kx^2+kx-1=0$有重根α ，求k的值。＊註＊

Sol 令$f(x)=x^3+kx^2+kx-1$， $f'(x)=3x^2+2kx+k$ ，

由Δ_k的表達式：$\begin{pmatrix} 3 & k \\ 2k & 2k \\ k & -3 \end{pmatrix}$，得$\Delta_1=-2k\cdot(k-3)$， $\Delta_2=-(k^2+9)$ ，

由判別式$\begin{vmatrix} 3 & -2k\cdot(k-3) & 0 \\ 2k & -(k^2+9) & -2k\cdot(k-3) \\ k & 0 & -(k^2+9) \end{vmatrix}=0$ ，得$k^4-18k^2-27=0$ ，

解得$k^2=9\pm6\sqrt{3}$（取正），故$k=\pm\sqrt{9+6\sqrt{3}}$ 。

另一方面，由$f(x)$除以$f'(x)$的餘式為$\dfrac{1}{9a}\cdot(\Delta_1 x+\Delta_2)$，得$\Delta_1\alpha+\Delta_2=0$ ，故

$$\alpha=-\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=-\frac{(k^2+9)}{2k(k-3)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(k^2+9)(k^2+3k)}{k^2\cdot(k^2-9)}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right)}{(9+6\sqrt{3})\cdot6\sqrt{3}}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}}\right),$$

所以，當$k=\sqrt{9+6\sqrt{3}}$時，重根$\alpha=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}\right)$；

當 $k=-\sqrt{9+6\sqrt{3}}$ 時，重根 $\alpha=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12}\right)$。

最後，我們討論特殊三次方程式 $f(x)=0$（當 $f(x)$ 圖形在反曲點之切線通過原點）有三個相異實根的條件。

引理 4：

設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 爲三次多項式函數。

(1) 設 $P\left(t,f(t)\right)$ 爲函數 $f(x)$ 圖形上的點，若 P 與原點連線爲函數 $f(x)$ 圖形的切線，則 t 滿足方程式 $2ax^3+bx^2-d=0$。

(2) 若函數 $f(x)$ 圖形的反曲點之橫坐標滿足方程式 $2ax^3+bx^2-d=0$，則 $d=\frac{b^3}{27a^2}$。

(3) 函數 $f(x)$ 圖形在反曲點之切線通過原點 $\Leftrightarrow$ $d=\frac{b^3}{27a^2}$。

證明》

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$， $f''(x)=6ax+2b=6a\cdot\left(x-\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$，

(1) 過 $P\left(t,at^3+bt^2+ct+d\right)$ 與函數 $f(x)$ 圖形相切的直線方程式爲

$y-\left(at^3+bt^2+ct+d\right)=\left(3at^2+2bt+c\right)\left(x-t\right)$，即

$y=\left(3at^2+2bt+c\right)x-\left(2at^3+bt^2-d\right)$，此與直線 $y=f'(t)x$ 爲同一直線，故

$2at^3+bt^2-d=0$，即 t 滿足方程式 $2ax^3+bx^2-d=0$。

(2) 若函數 $f(x)$ 圖形的反曲點之橫坐標 $x=-\frac{b}{3a}$ 滿足方程式 $2ax^3+bx^2-d=0$，則

$2a\cdot\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+b\cdot\left(-\frac{b}{3a}\right)^2-d=0$，得 $d=\frac{b^3}{27a^2}$。

(3) 由(1)、(2)得函數 $f(x)$ 圖形在反曲點之切線通過原點 $\Leftrightarrow$ $d=\frac{b^3}{27a^2}$。

推論》

設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 爲三次多項式函數，若函數 $f(x)$ 圖形在反曲點之切線通過原點，即 $d=\frac{b^3}{27a^2}$，則 $f(x)=0$ 有三個相異實根 $\Leftrightarrow$ $5b^2+12ac<0$。

證明》

由Δ_k的表達式：$\begin{pmatrix} 3a & b \\ 2b & 2c \\ c & 3d \end{pmatrix}$，得$\Delta_1=-2\cdot\left(b^2-3ac\right)$, $\Delta_2=9ad-bc$；

而由$d=\dfrac{b^3}{27a^2}$，得$\Delta_2=9ad-bc=\dfrac{b^3}{3a}-bc=\dfrac{b\left(b^2-3ac\right)}{3a}=\dfrac{-b}{6a}\cdot\Delta_1$。

於是$a\cdot\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 & 0 \\ 2b & \Delta_2 & \Delta_1 \\ c & 0 & \Delta_2 \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} 3a & \Delta_1 & 0 \\ 2b & \dfrac{-b}{6a}\cdot\Delta_1 & \Delta_1 \\ c & 0 & \dfrac{-b}{6a}\cdot\Delta_1 \end{vmatrix}=\dfrac{{\Delta_1}^2\cdot\left(5b^2+12ac\right)}{12}$，

故$f(x)=0$有三個相異實根　$\Leftrightarrow$　$5b^2+12ac<0$。

（當$5b^2+12ac<0$時，$\Delta_1=-2\cdot\left(b^2-3ac\right)=\dfrac{-1}{2}\cdot\left(9b^2-\left(5b^2+12ac\right)\right)<0$）

例如在例題 3 中，函數$f(x)=x^3-3x^2+kx-1$圖形在反曲點之切線通過原點(因爲$f(x)$的常數項滿足$\dfrac{b^3}{27a^2}=\dfrac{-27}{27}=-1$)，故$x^3-3x^2+kx-1=0$有三個相異實根之充要條件爲

$5b^2+12ac=45+12k<0$，即$k<-\dfrac{15}{4}$。

＊註：相對而言，欲求k使方程式$x^3+kx^2+kx+1=0$有重根α，過程很平順，解得：
　　當$k=3$時，三重根$\alpha=-1$；當$k=-1$時，二重根$\alpha=1$且另一根為-1。

數學方法之一 —

類比

江慶昆／台中市衛道中學退休教師

※ 楔子 》

1974 年某一天，我到台大數學系圖書館還書。旁邊有個同學也在還書，他還四本書，我一時好奇瞄了一下，看到其中兩本，一本是《何謂實數》，一本是《類比計算機原理》。

何謂類比？查一下維基百科：類比或類推是一種將特定事物所附帶的訊息轉移到其他特定事物之上的認知過程，且兩者不一定有實質上的同源性，其類比也不見得「合理」。在記憶、溝通與問題解決等過程中扮演重要角色；於不同學科中也有各自的定義。這個同學是楊柏因，國內的第一個資優生，楊維哲教授常爲他修剪鬍鬚，因爲要見蔣經國先生。

※ 關於數學學習，有人說方法比內容重要 》

最近因爲 99 課程綱要的實施，高一上有 Lagrange 插值多項式，我們在許多地方看到關於 Lagrange 插值多項式的討論。因此，我也想寫一下關於 Lagrange 插值法與中國餘數定理的類比。這是數學的方法，高中生嘛，除了一直解題目之外，總要在學習精神上提升一下。

※ 中國餘數定理與 Lagrange 差值法的內容與類比 》

中國餘數定理源出於三國或晉朝時的《孫子算經》一書。其中有一題：

「今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，問物幾何？」

以同餘式寫出（即求 x ），滿足 $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$ ，《孫子算經》給的答案是 $x = 23$ 。

聯立一元一次同餘式，後世稱爲「大衍」，其解法稱爲「大衍求一術」，到宋代數學家秦九韶集其大成。

中國餘數定理：

設都大於 1，並兩兩互質的整數 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ ，且 $m = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ ，若 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 都是整數，則方程組 $\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{m_2} \\ \quad\vdots \\ x \equiv r_n \pmod{m_n} \end{cases}$ 有解。

Lagrange 插值法：

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是不同的實數，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是實數，則多項式 $f(x)$ 的方程組

$$\begin{cases} f(x)\equiv y_1 \bmod (x-x_1) \\ f(x)\equiv y_2 \bmod (x-x_2) \\ \quad\vdots \\ f(x)\equiv y_n \bmod (x-x_n) \end{cases}$$ 有解。

（註：由餘式定理 $f(x)\equiv y_i \bmod (x-x_i)$，即 $f(x_i)=y_i$）

兩者的證明在代數或初等數論的教科書中都可以找到，這裡只是想呈現兩者的共同處，所以各舉一例說明。

例題 1：設 $x\equiv 2(\bmod 3), x\equiv 3(\bmod 5), x\equiv 2(\bmod 7)$，求 $x=$？

Sol

由題意可知 $\begin{cases} 3\mid x-2\cdots\cdots① \\ 5\mid x-3\cdots\cdots② \\ 7\mid x-2\cdots\cdots③ \end{cases}$

設 $x=3\times5\times7t+3\times5a+5\times7b+3\times7c$，代入①中得 $3\mid 35b-2$，取 $b=1$，

x 代入②中得 $5\mid 21c-3$，取 $c=3$，

x 代入③中得 $7\mid 15a-2$，取 $a=2$，

所以 $x=105t+30+35+63=105t+128=105(t+1)+23$，故 x 的最小值爲 23。

例題 2：若多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=4, f(2)=9, f(-4)=39$，則 $f(x)=$？

Sol

由題意可知 $\begin{cases} x-1\mid f(x)-4\cdots\cdots① \\ x-2\mid f(x)-9\cdots\cdots② \\ x+4\mid f(x)-39\cdots\cdots③ \end{cases}$

設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+4)q(x)+a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x+4)+c(x-1)(x+4)$，

代入①中得 $x-1\mid b(x-2)(x+4)-4 \quad\Rightarrow\quad b(1-2)(1+4)-4=0 \quad\Rightarrow\quad b=-\frac{4}{5}$，

同理，代入②中得 $c=\frac{9}{6}$；代入③中得 $a=\frac{39}{30}$，

最低次的多項式爲 $\frac{39}{30}(x-1)(x-2)-\frac{4}{5}(x-2)(x+4)+\frac{9}{6}(x-1)(x+4)$，

乘開化簡爲 $2x^2-x+3$。

我們注意到的是例題 1 與例題 2 中解法的共同處，也就是說「大衍求一，其術相同」。所謂「術」，用現代的看法就是「演算法」，所以我們可以設計一個電腦程式來求解。現代代數學，主要就是了解「代數結構」，整數 $\mathbb{Z}$ 與多項式 $R[x]$ 的代數「結構」一樣，這是中國餘數定理與 Lagrange 插值法可以做類比的原因。

※ 另一個類比：球面與圓是最佳類比 》

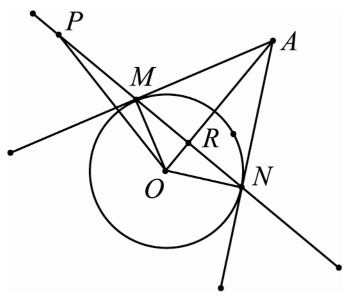
例題 1：

(1) 已知點 $A(3,5)$，圓 $C:(x-2)^2+(y+1)^2=4$，過 A 作圓 C 的切線，設切點爲 M,N，求直線 $\overline{MN}$ 的方程式。

(2) 已知點 $A(3,0,6)$，球面 $S:(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=10$，過 A 作 S 的切線，則所有的切線形成一圓，求包含此圓的平面方程式。

圓 C	球面 S
包含切點的直線 L	包含切點所形成的圓的平面 E
直線 L 的方程式	平面 E 的方程式

Sol (1) 設 $P(x,y)$ 是 $\overline{MN}$ 上的動點，



則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\overline{OA}\times\overline{OR}=\overline{OM}^2=r^2$，

亦即 $\overline{MN}$ 的方程式爲

$(x-3)(3-2)+(y-5)(5+1)=4$。

(2) 平面 E 的方程式爲 $(x-3)(3-3)+(y-4)(0-4)+(z-4)(6-4)=10$，

亦即 $2y-z+1=0$。

例題 2：設 S 爲空間中一球面，$\overline{AB}$ 爲其一直徑，且 $\overline{AB}=10$，若 P 爲空間中一點，使得 $\overline{PA}+\overline{PB}=14$，則 P 點的位置可能落在哪裡？〔94 年學測〕

(A)線段 $\overline{AB}$ 上 (B)直線 $\overline{AB}$ 上，但不在線段 $\overline{AB}$ (C)球面 S 上

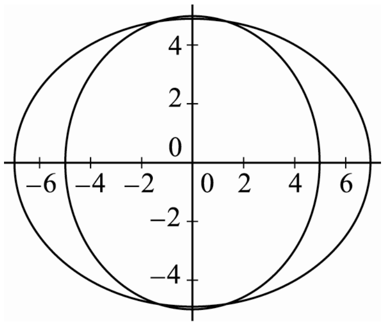
(D)球 S 的內部，但不在線段 $\overline{AB}$ (E)球 S 的外部，但不在線段 $\overline{AB}$。

Sol 空間中，滿足 $\overline{PA}+\overline{PB}=14$ 的 P 點是橢球，

但是橢球比較不好畫（而且也沒有必要），
我們把問題轉化到平面上的橢圓，
橢圓的 $2a=14,2c=10$，
所以 $a=7,c=5,b^2=a^2-c^2=24$，
把橢圓 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{24}=1$ 與圓 $C:x^2+y^2=25$ 畫在一起，

圖形如右。

由圖形看出，橢圓上的點 P 有可能在



(1) 直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上，但不在線段 $\overline{AB}$

(2) 圓 C 上

(3) 圓 C 的內部，但不在線段 $\overline{AB}$

(4) 圓 C 的外部，但不在線段 $\overline{AB}$

(5) 但不可能在線段 $\overline{AB}$ 上

所以答案選(B)(C)(D)(E)。

也就是說，我們作如是類比：球 $\leftrightarrow$ 圓，橢球 $\leftrightarrow$ 橢圓。

※ 習作 》

習作 1：

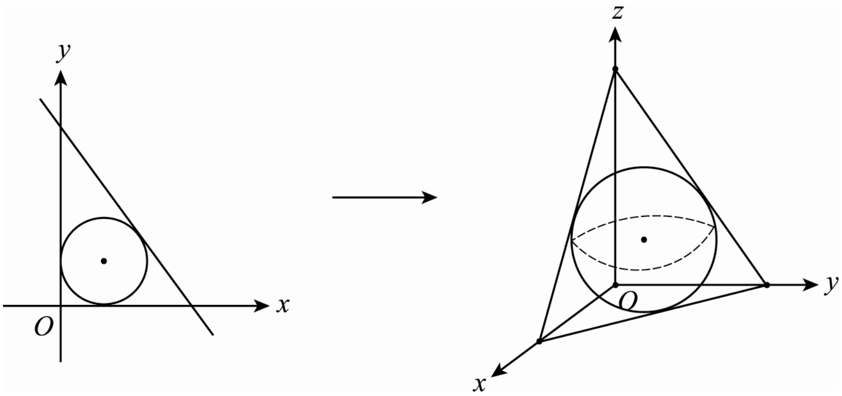
圓	球面
面積 $A(r)=\pi r^2$	體積 $V(r)=\dfrac{4\pi r^3}{3}$
周長 $L(r)=2\pi r$	表面積 $A(r)=4\pi r^2$
$A'(r)=L(r)$	$V'(r)=A(r)$

這是另一種類比，基本上是由二維推到三維。你可以從證明 $A'(r)=L(r)$，$V'(r)=A(r)$ 的過程中看到兩者的類比關係。

習作 2：

設 $O(0,0,0), A(3,0,0), B(0,6,0), C(0,0,9)$，求四面體 $OABC$ 的內切球方程式。

在坐標平面上考慮 $O(0,0), A(3,0), B(0,6)$，求△OAB 的內切圓方程式，然後推到球面。



答案是 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$。

習作 3：

試證$\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}<\dfrac{\ln(n)}{n}$，對所有大於 2 的正整數$n$都成立。

Sol 設$f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$，則$f'(x)=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}<0,\forall x\geq 3$，

所以$f(x)$在$x\geq 3$以後是遞減函數，

又$f(1)=0$，所以$f(n+1)<f(n),\forall n\geq 3$得證。

原命題中，n是正整數、是離散的，好像要用數學歸納法作。定義一個連續函數$f(x)$，就可以使用微積分。

※ 後記 》

實驗或觀察得到的數據是離散的（discrete），如何由離散的數據得到連續的（continuous）函數，其方法叫做插值法，是研究自然界現象的一個重要的方法。給兩個點，我們得到一條直線；給三個點，我們得到一個二次函數，…以此類推，就是 Lagrange 插值法。

另一個插值法的例子是關於 Gamma 函數$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$；對一個正整數$n$，我們都知道$n!=n(n-1)(n-2)\cdots\times 3\times 2\times 1$。十八世紀初，數學家想知道如何去定義一個分數的階乘，直到 1729 年，尤拉（Leonhard Euler 1707~1783）才解決這個問題：只要證明$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$及$\Gamma(1)=1$，就可以得到推論$\Gamma(n+1)=n!$。至於尤拉是如何找到 Gamma 函數的，http://www.maa.org/news/columns.html 中 Ed Sandifer 教授（2007.9）的專欄 How Euler did It？的文章 Gamma the Function，可以找到。

參考資料

1. 九章編輯部（1990），數學發現，九章出版社，P.102
2. 莫宗堅（1987），代數學(上)，聯經出版社，P.22
3. 葉善雲（2010），Larange 插值法，龍騰數亦優，第 13 期，P.17
4. 許志農（2004），中國剩餘定理，取自 https://docs.google.com/viewer?url=http://math.ntnu.edu.tw/~maco/macobook/arith/8.pdf

利用直線參數式與克拉瑪公式 —

求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標的公式解法

李維昌／國立宜蘭高中

※ 研究目的 》

試圖以直線參數式與克拉瑪公式，來探求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標的公式解法。

※ 研究過程 》

已知空間直角坐標系中，O為原點，兩歪斜線L_1與L_2分別通過點$A_1(x_1,y_1,z_1)$，$A_2(x_2,y_2,z_2)$，L_1與L_2的方向向量分別為$\overrightarrow{d_1}=(l_1,m_1,n_1),\overrightarrow{d_2}=(l_2,m_2,n_2)$，試求$L_1$與公垂線的交點$B_1$及$L_2$與公垂線的交點$B_2$坐標。

一、建立二元一次聯立方程組：

1. $\because B_1\in L_1$，$\therefore B_1=(x_1+l_1t_1,y_1+m_1t_1,z_1+n_1t_1),t_1\in\mathbb{R}$，
$\because B_2\in L_2$，$\therefore B_2=(x_2+l_2t_2,y_2+m_2t_2,z_2+n_2t_2),t_2\in\mathbb{R}$
$$\Rightarrow \overrightarrow{B_1B_2}=(x_2-x_1+l_2t_2-l_1t_1,y_2-y_1+m_2t_2-m_1t_1,z_2-z_1+n_2t_2-n_1t_1)\ .$$

2. $\because \overrightarrow{B_1B_2}\perp\overrightarrow{d_1}$ 且 $\overrightarrow{B_1B_2}\perp\overrightarrow{d_2}$，$\therefore \overrightarrow{B_1B_2}\cdot\overrightarrow{d_1}=0$ 且 $\overrightarrow{B_1B_2}\cdot\overrightarrow{d_2}=0$。

3. $$\begin{cases}0=\overrightarrow{B_1B_2}\cdot\overrightarrow{d_1}=\left(x_2-x_1+l_2t_2-l_1t_1\right)l_1+\left(y_2-y_1+m_2t_2-m_1t_1\right)m_1+\left(z_2-z_1+n_2t_2-n_1t_1\right)n_1\\0=\overrightarrow{B_1B_2}\cdot\overrightarrow{d_2}=\left(x_2-x_1+l_2t_2-l_1t_1\right)l_2+\left(y_2-y_1+m_2t_2-m_1t_1\right)m_2+\left(z_2-z_1+n_2t_2-n_1t_1\right)n_2\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}0=\left[\left(x_2-x_1\right)l_1+\left(y_2-y_1\right)m_1+\left(z_2-z_1\right)n_1\right]+t_2\left(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\right)-t_1\left(l_1^2+m_1^2+n_1^2\right)\\0=\left[\left(x_2-x_1\right)l_2+\left(y_2-y_1\right)m_2+\left(z_2-z_1\right)n_2\right]+t_2\left(l_2^2+m_2^2+n_2^2\right)-t_1\left(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\right)\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}0=\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_1}+t_2\left(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\right)-t_1\left(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1}\right)\\0=\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2}+t_2\left(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\right)-t_1\left(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1\left(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1}\right)-t_2\left(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\right)=\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_1}\\t_1\left(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\right)-t_2\left(\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\right)=\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{cases}.$$

二、利用克拉瑪公式求解：

1. 設$\overrightarrow{d_1}$與$\overrightarrow{d_2}$的夾角為θ，因$\overrightarrow{d_1}$與$\overrightarrow{d_2}$不平行，故$\sin\theta\neq0$。

2. $\Delta=\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & -\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & -\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}=-\left[\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2-\left(\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\right)^2\right]=-\left|\overrightarrow{d_1}\right|^2\left|\overrightarrow{d_2}\right|^2\sin^2\theta\neq 0$,

由克拉瑪公式得知(t_1,t_2)恰有一組解，

$$t_1=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_1} & -\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2} & -\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & -\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & -\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}},\quad t_2=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & -\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & -\overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}\ .$$

三、結論：

1. $$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OA_1}+t_1\overrightarrow{d_1}=\overrightarrow{OA_1}+\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}\overrightarrow{d_1}\ .$$

2. $$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{OA_2}+t_2\overrightarrow{d_2}=\overrightarrow{OA_2}+\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_1} & \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}\\ \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2} & \overrightarrow{d_2}\cdot\overrightarrow{d_2}\end{vmatrix}}\overrightarrow{d_2}\ .$$

四、應用：

設空間二歪斜線： $L_1:\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+7}{-1},L_2:\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-6}{-2}$ ，已知 $\overrightarrow{d_1}=(4,-3,-1),\overrightarrow{d_2}=(3,-4,-2),\overrightarrow{OA_1}=(11,-5,-7),\overrightarrow{OA_2}=(-5,4,6)$，$O$爲空間直角坐標系的原點，$\overrightarrow{A_1A_2}=(-16,9,13)$ 。試求 (1) L_1與公垂線的交點B_1。(2) L_2與公垂線的交點B_2。

Sol

$$t_1=\frac{\begin{vmatrix}-104 & 26\\ -110 & 29\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}26 & 26\\ 26 & 29\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}-52 & 26\\ -52 & 29\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}26 & 26\\ 26 & 29\end{vmatrix}}=-2,\quad t_2=\frac{\begin{vmatrix}26 & 104\\ 26 & 110\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}26 & 26\\ 26 & 29\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}26 & 52\\ 26 & 58\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}26 & 26\\ 26 & 29\end{vmatrix}}=2\ ,$$

$\overrightarrow{OB_1}=(11,-5,-7)+(-2)\cdot(4,-3,-1)=(3,1,-5)$,

$\overrightarrow{OB_2}=(-5,4,6)+2\cdot(3,-4,-2)=(1,-4,2)$.

參考文獻：

1. 李維昌（98 年 4 月 30 日），
利用正射影及外積的概念求兩歪斜線的公垂線段的距離及端點坐標，
龍騰數亦優，第 9 刊，P.17
2. 李維昌（98 年 12 月），
利用平面的法向量來求兩歪斜線的公垂線段的兩端點坐標，
數學傳播，第三十三卷第四期，P.63～66
3. 李維昌（99 年 3 月 30 日），
利用內積與克拉瑪公式求兩歪斜線的公垂線段的兩端點坐標的公式解法，
龍騰數亦優，第 11 刊，P.12～14
4. 李維昌（99 年 12 月），
利用向量三重積求兩歪斜線的公垂線段的兩端點坐標的公式解法，
數學傳播，第三十四卷第四期，P.43～45

關於對數的證法

李維昌／國立宜蘭高中

對數性質的另類證法

※ 研究目的 》 試圖以另類的方法來證明對數的一些性質。

※ 研究過程 》 以下探討的對數底數皆大於 0，但不等於 1；真數皆大於 0。

性質 **1**： $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$.

證明： $\log_a rs = \log_a \left(a^{\log_a r}\right)\cdot\left(a^{\log_a s}\right) = \log_a a^{(\log_a r + \log_a s)} = \log_a r + \log_a s$.

性質 **2**： $\log_a\left(\dfrac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$.

證明： $\log_a\left(\dfrac{r}{s}\right) = \log_a \dfrac{a^{\log_a r}}{a^{\log_a s}} = \log_a a^{(\log_a r - \log_a s)} = \log_a r - \log_a s$.

性質 **3**： $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$.

證明： $\log_{a^n} b^m = \log_{a^n}\left(a^{\log_a b}\right)^m = \log_{a^n} a^{n^{\left(\frac{m}{n}\log_a b\right)}} = \dfrac{m}{n}\log_a b$.

性質 **4**： $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$.

證明： $\log_a b = \log_a c^{\log_c b} = \log_a c\cdot\log_c b$.

性質 **5**： $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

證明： $\log_a b = \log_{c^{\log_c a}} b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

性質 **6**： $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

證明： $a^{\log_b c} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b c} = \left(b^{\log_b c}\right)^{\log_b a} = c^{\log_b a}$.

※ 結論 》 利用 $r = a^{\log_a r}$ 的恆等式及指數律，即可證出以上六種對數的性質。

對數換底公式的創意直觀證法

若 $a>0, b>0, c>0$，而且 $a\neq 1, b\neq 1$，那麼 $\log_b c=\dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ 。

傳統證法：（楊維哲、蔡聰明、吳隆盛（2000.2），高中數學 2，三民出版社）

若 $\log_a b=x, \log_b c=y$ ，

意思是 $b=a^x, c=b^y$ ，

於是 $c=b^y=\left(a^x\right)^y=a^{xy}$ ，

因此 $\log_a c=xy$ ，

因而 $\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\dfrac{xy}{x}=y=\log_b c$ 。

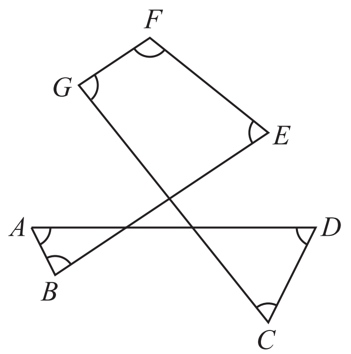
創意直觀證法：（李維昌（2008.2））

$$\log_b c=\log_b\left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{\log_a c}{\log_a b}}=\frac{\log_a c}{\log_a b} \; .$$

臺北縣99學年度縣立高中職數學科競賽試題

填充題（共有六題，除第四題 5 分外，其餘每題都是 7 分，總計 40 分）

1. 如下圖所示：



求角度和 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=$ ____________。

2. 已知實數 a,b 滿足 $a\neq b$，且

$$\begin{cases} a^2-4a+1=0 \\ b^2-4b+1=0 \end{cases},$$

求 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}=$ ____________。

3. 已知 x^2-x-1 是 ax^3+bx^2+1 的一個因式，求 $b=$ ____________。

4. 已知 $a-b=2+\sqrt{3}, b-c=2-\sqrt{3}$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=$ ____________。

5. 已知實數 x 滿足

$$\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-2x}=2,$$

求 $x=$ ____________。

6. 將 8 個正數排成一列，從第三項開始，每項都是前兩項的乘積，且第五項為 2，第八項為 16

○○○○②○○⑯

求第一項與第二項的和為____________。

參考答案

1.	2.	3.	4.	5.	6.
540°	1	–2	15	$\frac{3}{8}$	$1+\sqrt{2}$

計算證明題（共有四題，總計 50 分）

1. 設數列$\langle a_n \rangle$的遞迴定義如下：

$$a_1 = 1, a_{n+1} - 4a_n a_{n+1} + 3a_n = 1 \text{（} n \ge 1 \text{）}.$$

   (1) 試將a_{n+1}項以a_n項來表示。

   (2) 試求a_4的值。

   (3) 試寫出一般項a_n（以n的式子表示），並利用數學歸納法證明你的答案。

（14 分）

2. 設a,b是正實數，且$a \ge 1, b \ge 1$，比較

$$A = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$$

與

$$B = \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

的大小，並證明之。

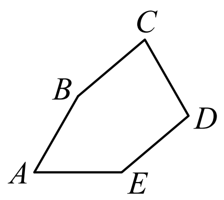
（12 分）

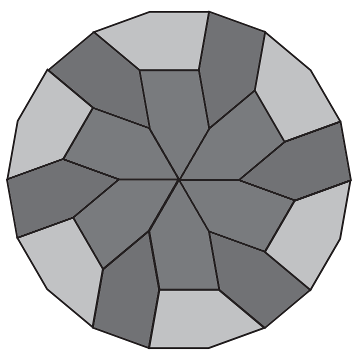
3. (1) 證明$\cot\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)}$。

   (2) 求$\cot\dfrac{\pi}{24}$的精確值。

（12 分）

4. 利用每邊長度都是 1 的五邊形 $ABCDE$ 十八個可以鑲嵌出邊長為 1 的正十八邊形，如下圖所示：





求五邊形 $ABCDE$ 的各內角度數。

（12 分）

參考解答

1. (1) $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$.

(2) 代入$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$計算知道

$$a_1=\frac{1}{1},a_2=\frac{2}{3},a_3=\frac{3}{5}$$

及

$$a_4=\frac{4}{7}\ .$$

(3) 根據(2)可以猜測：數列a_n的一般項爲

$$a_n=\frac{n}{2n-1}\ .$$

2. 實數A與B的大小關係爲$A\ge B$，證明如下：

證明不等式「$A\ge B$」等同證明不等式

$$(2+a+b)\left(1+\sqrt{ab}\right)\ge 2(1+a+b+ab)\ .$$

將上式乘開，消去共同項，得不等式

$$2\sqrt{ab}+(a+b)\sqrt{ab}\ge a+b+2ab\ .$$

也就是證明不等式

$$2\sqrt{ab}\left(1-\sqrt{ab}\right)+(a+b)\left(\sqrt{ab}-1\right)\ge 0$$

或不等式

$$\left(\sqrt{ab}-1\right)\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)\ge 0\ .$$

利用$a\ge 1$及$b\ge 1$得$\sqrt{ab}-1\ge 0$，再利用算幾不等式

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$$

得$a+b-2\sqrt{ab}\ge 0$，證得上述不等式，即不等式$A\ge B$成立。

3. (1) $\cot\frac{\pi}{24}=\frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$.

(2) 因為

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)&=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)&=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\cot\frac{\pi}{24}&=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\\&=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{6-2}=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.\end{aligned}$$

4. 因為正十八邊形的中心是由 6 個 $\angle A$ 環繞而成，所以 $6\angle A=360°$，即 $\angle A=60°$。
觀察正十八邊形的頂點，發現其內角有 $\angle B, 2\angle C, \angle A+\angle D$ 等三種表現方式，又正十八邊形的內角度數為

$$\frac{(18-2)\times180°}{18}=160°,$$

即

$$\angle B=160°, 2\angle C=160°, 60°+\angle D=160°,$$

解得

$$\angle B=160°, \angle C=80°, \angle D=100° .$$

最後，由五邊形的內角和，得

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=(5-2)\times180°,$$

解得

$$\angle E=540°-60°-160°-80°-100°=140° .$$

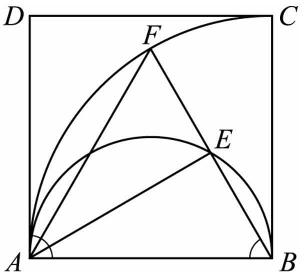
專欄 動手玩數學

許志農／台灣師範大學數學系

遊戲 53

☆☆☆

如圖所示，在正方形 $ABCD$ 上畫兩個圓弧：一個是以 B 爲圓心，線段 $\overline{BA}$ 爲半徑所畫的四分之一圓，另一個是以線段 $\overline{AB}$ 的中點爲圓心，線段 $\overline{AB}$ 爲直徑所畫的半圓；又 F, E 是兩個圓弧上的點，而且 B, E, F 三點共線。



令 $\angle DAF = \angle 1, \angle FAE = \angle 2, \angle EAB = \angle 3$，$\angle ABE = \angle 4$，請完成以下四道題目：

(1) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$ ________。

(2) $\angle 4 =$ ________ $\angle 1$。

(3) $\angle 3 + \angle 4 =$ ________。

(4)證明 $\angle 1 = \angle 2$。

〔玩鎖・玩索〕

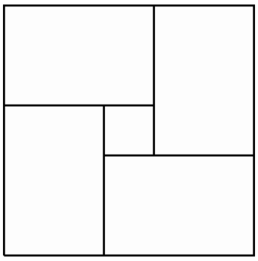
這道問題取自陶哲軒十五歲時所寫的一本書《解題・成長・快樂－陶哲軒教你學數學》。陶哲軒是澳大利亞裔的華人，九歲得國際數學奧林匹克銅牌獎，十歲得銀牌獎，十一歲得金牌獎。陶哲軒更在三十歲時（2006 年）獲得有「數學諾貝爾獎」之稱的「費爾茲獎」，這個獎每四年才頒發一次，且要求得獎者不得超過四十歲。

幾何題目用解析方法來解，有時很繁雜，所以有些人稱這樣的解法是暴力法。陶哲軒顯然不怎麼欣賞這樣的解題途徑，他在這本書的第一版序言寫道「…把一個漂亮的、簡潔的幾何題用解析幾何教科書的方法變成醜陋怪物般的方程來解，就不會給予我們成就感。」

遊戲 54

☆☆☆

將邊長爲 1 的正方形分割成五個矩形，如下圖所示：



若四個外圍矩形的面積都相等，則證明內部的矩形也是正方形。

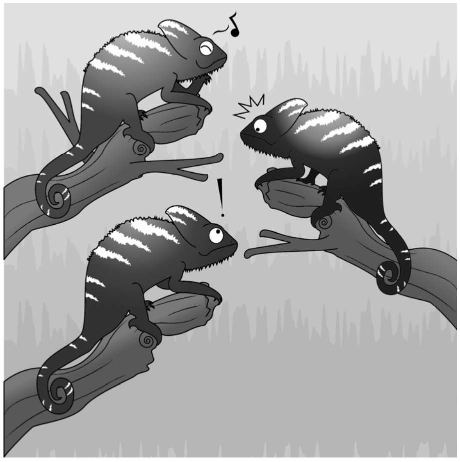
〔玩鎖・玩索〕

這是《環球城市數學競賽》的考題，也被陶哲軒收錄在他十五歲所寫的那本《解題・成長・快樂－陶哲軒教你學數學》書裡。這道問題的賣點在「面積相等可以推得內部的矩形爲正方形嗎？」

遊戲 55

☆☆☆

島上有13隻紅色變色龍、15隻藍色變色龍、17隻綠色變色龍。如果兩隻不同顏色的變色龍相遇，牠們都變成第三種顏色（一隻紅色變色龍與一隻藍色變色龍相遇時，牠們都變成綠色變色龍），而且這是牠們唯一變色的機會。



試問：所有的變色龍能否最終都變成同一種顏色？

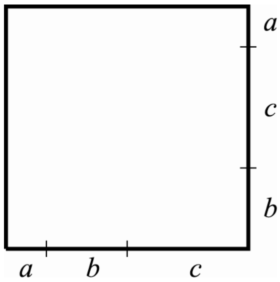
〔玩鎖・玩索〕

這也是《環球城市數學競賽》的考題，也被陶哲軒收錄在他十五歲所寫的那本《解題・成長・快樂－陶哲軒教你學數學》書裡。

遊戲 56

☆☆

設 a,b,c 為正實數，考慮邊長 $a+b+c$ 的正方形，如下圖所示：



提出對

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

與

$$\sqrt{2}\left(a+b+c\right)$$

的大小看法，並證明你的結論。

〔玩鎖・玩索〕

這是九十六學年度交通大學數學系的大學甄選入學考試試題，題目是想要考生在邊長為 $a+b+c$ 的正方形上畫兩條曲線，然後比較它們的大小。像這樣的證明方法就是所謂的「無字證明」。

動手玩數學~破解秘笈 第13期

遊戲 49

將 $Y=1642, M=11, D=4$ 代入計算公式

$$\left(1642+\left[\frac{1642}{4}\right]-\left[\frac{1642}{100}\right]+\left[\frac{1642}{400}\right]+\left[2.6\times 11-0.2\right]+4\right)$$
$$=1642+410-16+4+28+4$$
$$=2072$$
$$\equiv 0 \pmod 7.$$

故牛頓出生於星期日。

遊戲 50

設南極 $A(-1,2,1)$，北極 $B(3,-2,5)$，而地心 $O(1,0,3)$ 是南北極連接線段 $\overline{AB}$ 的中點，地球儀的直徑為

$$\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(2-(-2))^2+(1-5)^2}=4\sqrt{3}.$$

(1) 設包含該地球儀南緯 $30°$ 線的平面 E 與 $\overline{AB}$ 相交於 M 點。因為是南緯 $30°$，所以 M 是 $\overline{AO}$ 的中點，即 M 的坐標為

$$\left(\frac{-1+1}{2},\frac{2+0}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(0,1,2),$$

即平面 E 通過點 $M=(0,1,2)$。

因為 $\overrightarrow{AO}=(2,-2,2)$ 是平面 E 的法向量，所以平面 E 的方程式為

$$2x-2y+2z$$
$$=2\times 0-2\times 1+2\times 2=2,$$

即包含該地球儀南緯 $30°$ 線的平面方程式為 $x-y+z=1$。

(2) 由(1)知道：通過點 P 且與 $\overline{AB}$ 垂直平面 E_1 的方程式為

$$x-y+z$$
$$=\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)-\left(-1+\sqrt{6}\right)+\left(4+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$
$$=7.$$

圓心 O 至平面 E_1 的距離為

$$\frac{\left|(1-0+3)-7\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{3}.$$

畫個簡圖可以知道點 P 在北緯，且其度數 θ 滿足

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2},$$

即 $\theta=30°$，故點 P 位在北緯 $30°$。

遊戲 51

甲、乙、丙、丁、戊、己六名考生坐六個位置，一共有 $6!$ 種坐法。

(1) 先讓甲、乙就坐，甲、乙兩考生的座位左右相鄰的分布情形有 $4\times 2!=8$ 種，即六名考生坐六個位置後，甲、乙兩考生的座位左右相鄰的坐法有 $4!\times 8$ 種。故甲看到乙答案的機率為

$$\frac{4!\times 8}{6!}=\frac{8}{5\times 6}=\frac{4}{15}.$$

(2) 先讓甲、丙就坐，甲、丙兩考生的座位是丙座位在甲座位前面的分布情形有3種，即六名考生坐六個位置後，丙座位在甲座位前面的坐法有 $4!\times 3$ 種。故甲看到丙答案的機率為

$$\frac{4!\times 3}{6!}=\frac{3}{5\times 6}=\frac{1}{10}.$$

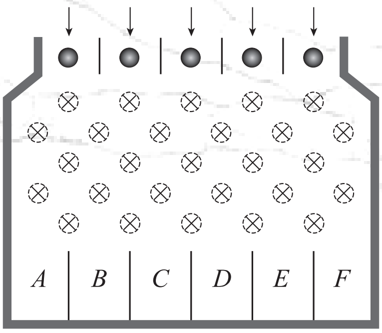
(3) 先讓甲、乙、丙就坐，甲、乙兩考生的座位左右相鄰，又丙座位在甲座位前面的分布情形有4種（仔細排排看，注意丙坐在第一排的中央位置時），即六名考生坐六個位置後，甲、乙兩考生的座位左右相鄰且丙座位在甲座位前面的坐法有 $3!\times 4$ 種。故

甲看到乙，也看到丙答案的機率爲

$$\frac{3!\times 4}{6!}=\frac{4}{4\times 5\times 6}=\frac{1}{30}.$$

$\boxed{\text{遊戲 52}}$

從下圖中可知：入口有左一，左二，…，左五等五個，而彈珠臺的彈珠降落的位置有 A,B,C,D,E,F 等六處：



如果在左一，左二，…，左五等五個入口各丟入 $2^5=32$（考慮五層滾輪的關係）顆彈珠，那麼根據隨機原則，這些彈珠落在 A,B,C,D,E,F 等六處的個數會依二項式定理的公式 1,5,10,10,5,1（兩側請考慮牆壁阻擋問題），如下表所示

	A	B	C	D	E	F
左一	16	10	5	1	0	0
左二	6	10	10	5	1	0
左三	1	5	10	10	5	1
左四	0	1	5	10	10	6
左五	0	0	1	5	10	16
總和	23	26	31	31	26	23

因爲一共投了 $5\times 32=160$ 顆彈珠，所以彈珠出現在 A,B,C,D,E,F 各個位置的機率分別爲

$$\frac{23}{160},\frac{26}{160},\frac{31}{160},\frac{31}{160},\frac{26}{160},\frac{23}{160}.$$

龍騰數亦優

讀者意見調查表

一、對《龍騰數亦優》各篇文章，您到目前爲止的閱讀狀態如何？各篇文章的參考價值如何？

參考價值 有	參考價值 無	篇名	閱讀狀況有 全部讀完	重要部份讀完	略翻	完全沒讀
☐	☐	1. 柯西不等式──一個無言證明	☐	☐	☐	☐
☐	☐	2. 三次方程式根的行列式判別	☐	☐	☐	☐
☐	☐	3. 數學方法之一──類比	☐	☐	☐	☐
☐	☐	4. 利用直線參數式與克拉瑪公式──求兩歪斜線之公垂線段兩端點坐標的公式解法	☐	☐	☐	☐
☐	☐	5. 關於對數的證法	☐	☐	☐	☐
☐	☐	6. 臺北縣 99 學年度縣立高中職數學科競賽試題	☐	☐	☐	☐
☐	☐	7.動手玩數學	☐	☐	☐	☐
☐	☐	8.第十三期動手玩數學破解秘笈	☐	☐	☐	☐

整體而言，以上文章您最喜歡哪一篇？編號：________________

爲什麼？________________________________

____

____

二、內容實用度

您認爲《龍騰數亦優》最實用的三篇文章是：

(1)________________

(2)________________

(3)________________

您認爲《龍騰數亦優》內可有可無的三篇文章是：

(1)________________

(2)________________

(3)________________

理由爲：________________

____

三、對本期《龍騰數亦優》的意見

1. 題材的選擇
   ☐ 恰到好處　☐ 普通　☐ 不符需求
2. 內容的深度
   ☐ 艱澀難懂　☐ 普通　☐ 過於淺顯
3. 實用的效果
   ☐ 效果佳　☐ 普通　☐ 效果不佳
4. 標題前言
   ☐ 吸引人　☐ 普通　☐ 不吸引人
5. 照片插畫
   ☐ 清晰簡明　☐ 普通　☐ 複雜模糊
6. 整體呈現方式
   ☐ 美觀大方　☐ 普通　☐ 不利閱讀

您對本書之整體意見：________________

____

____

____

____

五、個人資料

姓名：________________　電話：(O)________________　(H)________________

任教學校：________________　任教年級：________________　任教科目：________________

地址：□□□________________________________

E-mail：________________________________

龍騰數亦優

親愛的讀者，您好：

感謝您對《龍騰數亦優》的支持，秉持著不斷精益求精的一貫信念，我們特別設計了這份問卷，希望藉由讀者的看法及意見，幫助我們更加精進。

謝謝您耐心填寫此信問卷，再次感謝您對我們的支持與愛護！

敬祝

教 學 愉 快

《龍騰數亦優》期刊　敬上

請自行黏貼後直接投郵

廣 告 回 信

台灣北區郵政管理局登記證

北台字第 3032 號

免貼郵票．限時專送

248

新北市五股區五權七路 1 號

龍騰數亦優　期刊編輯室收