# 龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第13刊


龍騰文化

# 編輯室墨記

爲了紀念在數論等方面有傑出貢獻的數學家、教育家—華羅庚教授，於 1986 年始創全國性大型少年數學競賽活動，即「華羅庚金杯少年數學邀請賽」；此爲教育廣大青少年從小學習、熱愛科學的精神，激發學習數學的興趣、開發智力、普及數學科學爲宗旨的活動。並於 2006 年在香港聯合發起並舉辦首屆兩岸四地華羅庚金杯少年數學菁英邀請賽；其宗旨爲加強兩岸四地青少年之間的交流和往來，此每兩年舉辦一次的菁英賽是華杯賽的延續和補充，並將華杯賽的精神不斷發揚光大。今年是華羅庚教授誕生一百週年，八月於台灣鹿港舉辦的菁英賽更具有意義；「第三屆兩岸四地華羅庚金杯少年數學菁英邀請賽」試題提供給您參考。

在一次聊天探討品茶師考試的過程，猜想看看：如果有一個人，他胡亂配對 10 種不同的茶，則他配成功的杯數的數學期望值是多少？江慶昆老師經由合情的猜測，列舉更多證據以加強信心，並專注、尋找規律，進而證明其理論。從生活中探討、猜想數學，寓數學於趣味、娛樂之中。

高中數學 99 課程綱要納入新教材「插值多項式」，求圖形通過 $x$ 坐標不同的 $n$ 個點的最低次多項式；一般都用「Lagrange 插值多項式」來處理，傳統的「Newton 插值多項式」反而被忽略了。有鑑於此，葉善雲老師推導出多項式

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & c_{n-1}\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)+c_{n-2}\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-2}\right)+\cdots \\
& +c_2\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)+c_1\left(x-x_1\right)+c_0
\end{aligned}
$$

的各項係數。

接續前期變化多元的圓，繼續讓趙文敏教授帶領我們來探索圓的世界吧！本期的升學報報提供您99學年度師大數學系推甄試題，提供給您參考。在電視看過：知道年月日便可算出星期幾。這般的神乎其技原來可以套用公式計算，動手玩數學專欄告訴您可以怎麼計算。



發 行 人：李枝昌

編輯顧問：許志農

總 編 輯：陳韻嵐

副總編輯：陳美吟

執行編輯：莊莉錚

美術編輯：彭文君

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司

地　　址：248台北縣五股鄉五權七路1號

電　　話：(02)2299-9063

傳　　真：(02)2299-5311

創 刊 日：2006/11/30

出 刊 日：2010/11/15

網　　址：http://www.lungteng.com.tw

# 龍騰數亦優

2010.11 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

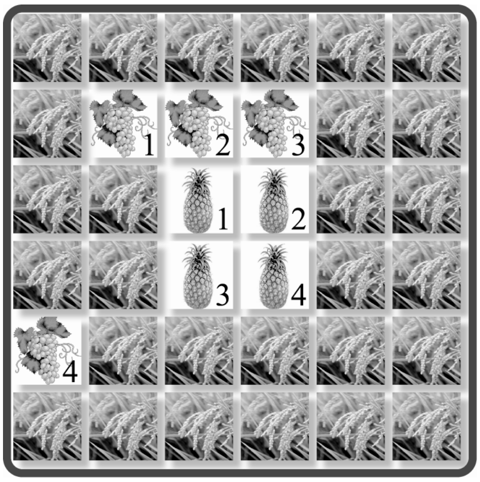
# 第三屆兩岸四地華羅庚金杯少年數學菁英邀請賽

**遊戲競賽題**（考試時間：60 分鐘）

時間：2010 年 8 月 10 日・地點：台灣鹿港

## ＊ 第一題 ＊

在$6\times6$的田地上，有四塊葡萄田，四塊鳳梨田，其餘 28 塊是稻米田，葡萄田與鳳梨田的編號如下圖所示：




今有四兄弟要分田，其父親的遺囑是這樣寫的：「…四兒乖巧，將田地分成形狀與大小相同的四等分，兄弟每人一份，但每人恰得葡萄田與鳳梨田各一塊，…。」

請你沿著虛線分田，讓四兄弟所分得的田滿足其父親的遺囑，並回答以下兩個問題：

(1) 請在空格中填入編號：

3 號葡萄田與 ______ 號鳳梨田應該分給同一個人；

4 號葡萄田與 ______ 號鳳梨田應該分給同一個人；

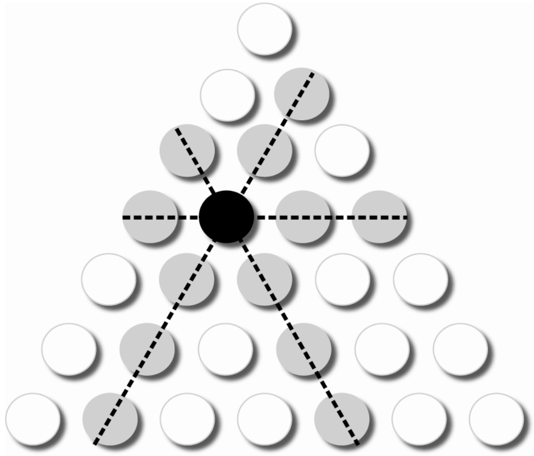
2 號葡萄田與 ______ 號鳳梨田應該分給同一個人；

1 號葡萄田與 ______ 號鳳梨田應該分給同一個人。

(2) 在上圖的田地中，畫出你的分田情形。

## ＊ 第二題 ＊

在邊上有七個圓圈的正三角形棋盤上安排皇后，皇后管轄的圓圈與安排的規則如下：



**規則 1：**

任意點選一個圓圈，該圓圈代表一位皇后的住所，且與正三角形三邊平行的方向所經過之圓圈皆爲該皇后的管轄圓圈。

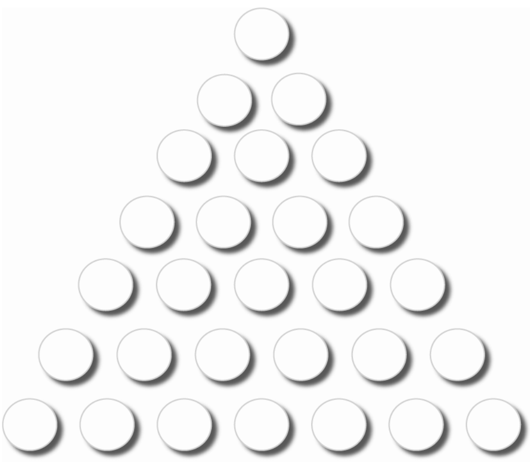
**規則 2：**

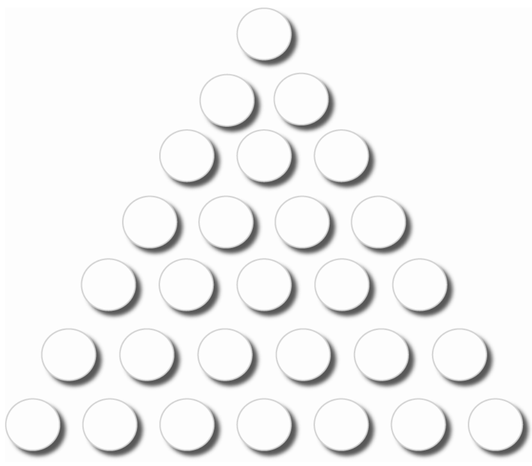
任何兩位皇后的所在圓圈不能互相管轄（即后不見后）。

請回答以下兩個問題：

(1) 在這個正三角形棋盤上，每個圓圈都被至少一位皇后管轄的情形下，最少要擺放幾個皇后，將其圖示在下圖的左圖中。

(2) 在這個正三角形棋盤上，每個圓圈都被至少一位皇后管轄的情形下，最多可擺放幾個皇后，將其圖示在下圖的右圖中。





## ＊ 第三題 ＊

將

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13$$

這 13 個數字讓甲、乙兩人輪流拿取（甲先拿，乙後拿），並計算其總和，拿取規則與輸贏判定如下：

**規則 1：**

每次只能選取一個數字，且選過的數字不能再選。

**規則 2：**

經過六輪選取後，當選取的 12 個數字之總和為 3 的倍數時，乙贏；不是 3 的倍數時，甲贏。

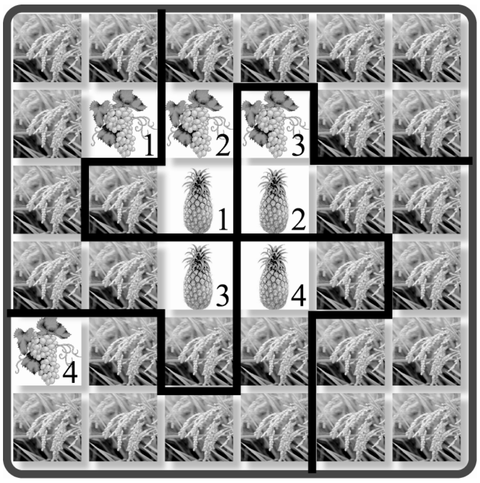
請回答以下兩個問題：

(1) 誰有必勝的策略？

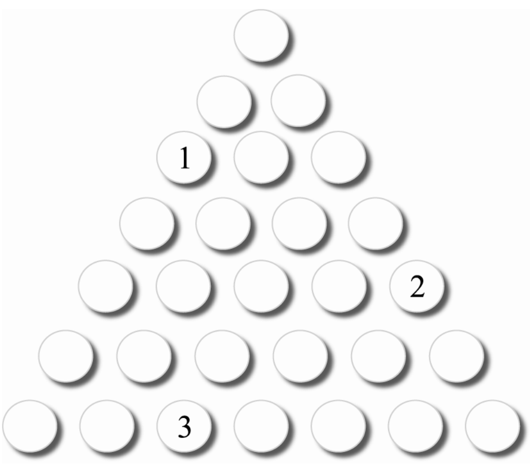
(2) 承(1)，必勝的策略就是優先選取哪些數字？

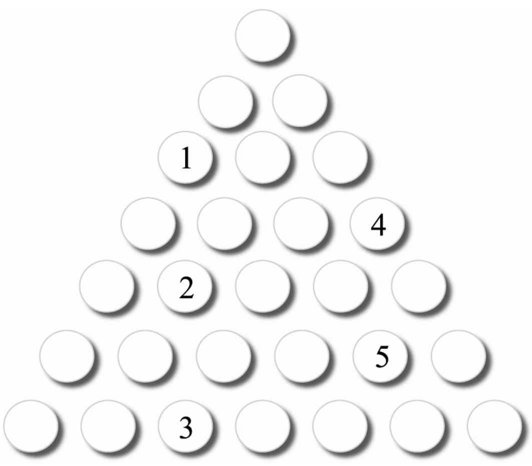
## 參考解答

1. (1) 3 號葡萄田與 2 號鳳梨田應該分給同一個人；
   4 號葡萄田與 4 號鳳梨田應該分給同一個人；
   2 號葡萄田與 1 號鳳梨田應該分給同一個人；
   1 號葡萄田與 3 號鳳梨田應該分給同一個人。
   (2) 如下圖所示：



2. 以下的答案，可以旋轉，鏡射：





3. (1) 甲有必勝的策略。
   (2) 甲優先選取

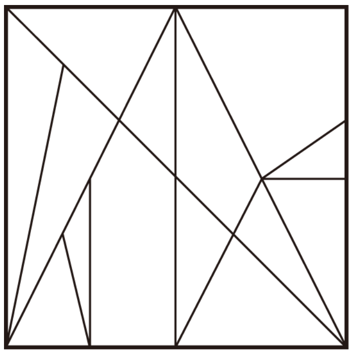
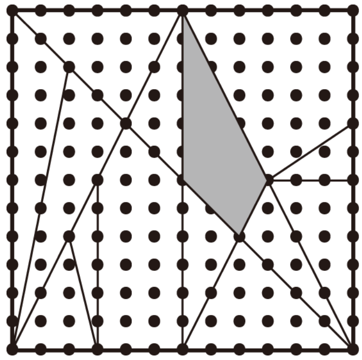
$$1,4,7,10,13$$

這五個數字。

## 小 學 組　筆試一試卷（考試時間：60 分鐘）

時間：2010 年 8 月 10 日・地點：台灣鹿港

1. 下左圖是最近被發現的阿基米德的《胃痛》拼圖，將正方形分割成 14 塊多邊形：

專家研究後發現，可以在邊長 12 公分的正方形上，正確的畫出這 14 塊拼圖，如上右圖所示。問：灰色那塊的面積是 ＿＿＿＿＿ 平方公分。

2. 如圖，要在下列$5\times5$的方格表中填入 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 五個英文字母，並且要求五個字母在每一行與每一列及對角線上，都只出現一次，則@所表示的英文字母為 ＿＿＿＿＿ 。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $E$ | @ | | | |
| | | $E$ | | |
| | | | | |
| $C$ | | | | $A$ |
| $D$ | | | | $B$ |

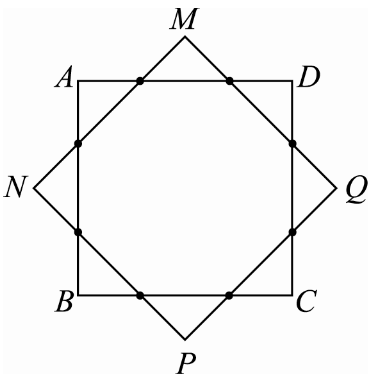
3. 賈斯特要從花蓮赴彰化 鹿港參加華羅庚金杯數學競賽，爸爸開車出門前看了一下車子的里程錶，剛好是一個迴文數 69696 公里（迴文數：從左到右，或從右到左讀到的數字結果都一樣）。一連開了 5 個小時到達目的地，到達時里程錶又剛好是另一個迴文數，在路程中，爸爸開車的時速從未超過 85 公里，請問爸爸開車的平均速度最大值是每小時 ＿＿＿＿＿ 公里。

4. 有四組數的平均數，其規定如下：
(1) 從 1 到 100810 的自然數中，所有 11 的倍數之平均數
(2) 從 1 到 100810 的自然數中，所有 13 的倍數之平均數
(3) 從 1 到 100810 的自然數中，所有 17 的倍數之平均數
(4) 從 1 到 100810 的自然數中，所有 19 的倍數之平均數
這四個平均數中，最大的平均數的值是 ＿＿＿＿＿ 。

5. 有三個最簡真分數，其分子的比為 3：2：4，分母的比為 5：9：15；將這三個分數相加，再經過約分後為 $\frac{28}{45}$ 。問：三個分數的分母相加是 ＿＿＿＿＿ 。

6. 在 $\dfrac{810\times811\times812\times\cdots\times2010}{810^{n}}$ 爲正整數的情形下，$n$ 的最大值是 ＿＿＿＿＿＿。

7. 如圖，若將正方形 $ABCD$ 各邊三等分，延長等分點作出新四邊形 $MNPQ$，則正方形 $ABCD$ 的面積：四邊形 $MNPQ$ 的面積＝＿＿＿＿＿＿。




8. 教數學的王老師準備去拜訪一位朋友，出發前王老師先和這位朋友通電話，朋友家的電話號碼是 27433619，當王老師打完電話之後，發現這個電話號碼恰好是 4 個連續質數的乘積。問：這 4 個質數的總和是 ＿＿＿＿＿＿。

9. 一個九宮圖，圖內文字「華、羅、庚、杯、數、學、精、英、賽」分別表示 1～9 中的九個不同的數字，並且這九個數字符合以下三個條件：

| | | |
|---|---|---|
| 華 | 羅 | 庚 |
| 杯 | 數 | 學 |
| 精 | 英 | 賽 |

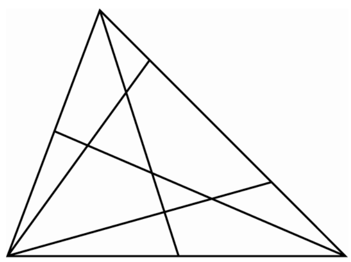
(1) 每個「田」內四個數的和都相等

(2) 華×華＝英×英＋賽×賽

(3) 數＞學

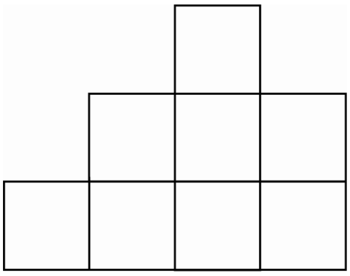
根據上述條件，「華、杯、賽」所代表的三數之乘積爲 ＿＿＿＿＿＿。

10. 如圖，有很多大大小小的三角形，這些三角形有的是單獨顯現的，有的是合併若干區塊才得到的，這些位置不完全相同的三角形共有 ＿＿＿＿＿＿ 個。

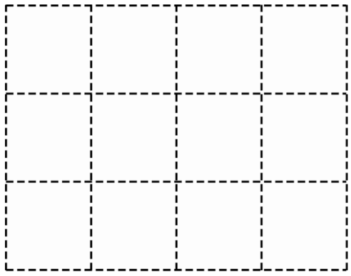


11. 怡榮號渡輪時速 40 千米，單數日由 $A$ 地順流航行到 $B$ 地，雙數日由 $B$ 地逆流航行到 $A$ 地。（水速爲每小時 24 千米）有一單數日渡輪航行到途中的 $C$ 地時，失去動力，只能任船漂流到 $B$ 地，船長計得該日所用的時間爲原單數日的 $\dfrac{43}{18}$ 倍；另一雙數日渡輪航行到途中的 $C$ 地時，又失去動力，船在漂流過程中，維修人員全力搶修了 1 小時後船以 2 倍時速前進到 $A$ 地，結果船長發現該日所用的時間與原雙數日所用時間一秒不差。請問 $A$、$B$ 兩地的距離爲 ＿＿＿＿＿＿ 千米。

12.老師用 10 個 1×1×1 公分的小正立方體擺出一個立體圖形，它的正視圖如圖一所示，且圖中任兩相鄰的小正立方體至少有一稜邊（1 公分）共用，或有一面（1×1 公分）共用。老師拿出一張 3×4 公分的方格紙如圖二所示，請小榮將此 10 個小正立方體依正視圖擺放在方格紙中的方格內，請問小榮擺放完後的左視圖有 ＿＿＿＿＿ 種。（小正立方體擺放時不得懸空，每一小正立方體的稜邊與水平線垂直或平行）



圖一



圖二

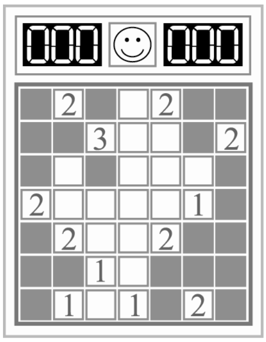
## 參考答案

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | B | 82.2 | 50413.5 | 203 | 150 |
| **7.** | **8.** | **9.** | **10.** | **11.** | **12.** |
| 9：8 | 290 | 120 | 29 | 192 | 16 |

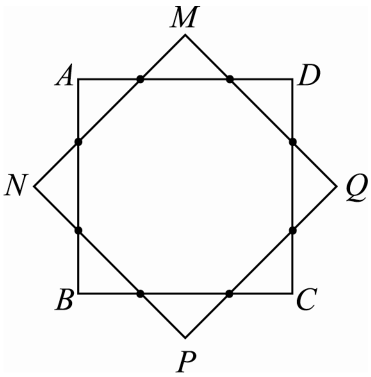
## 初 一 組　筆試一試卷（考試時間：60 分鐘）

時間：2010 年 8 月 10 日・地點：台灣鹿港

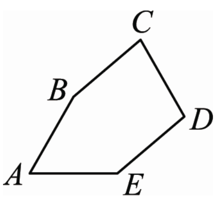
1. 微軟電腦軟體的遊樂場中有一種叫「踩地雷」的遊戲，相信大部分的人都玩過。如圖所示，白色區域是已探勘沒有地雷的區域，數字代表該區域的四周灰色地帶所佈的地雷數，而且每塊灰色區域至多佈一顆地雷。問：總共佈 ________ 顆地雷。

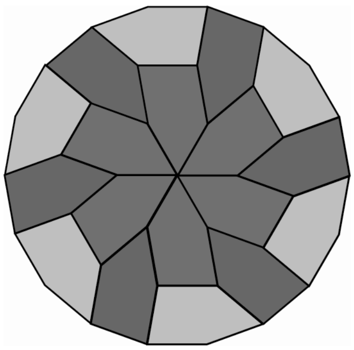



2. 如圖，若將正方形 $ABCD$ 各邊三等分，延長等分點作出新四邊形 $MNPQ$，則四邊形 $MNPQ$ 的面積：正方形 $ABCD$ 的面積＝________。




3. 利用每邊長度都是 1 的五邊形 $ABCDE$ 十八個可以鑲嵌出邊長為 1 的正十八邊形，如圖所示，求五邊形 $ABCDE$ 的內角 $E$ 是 ________ 度。



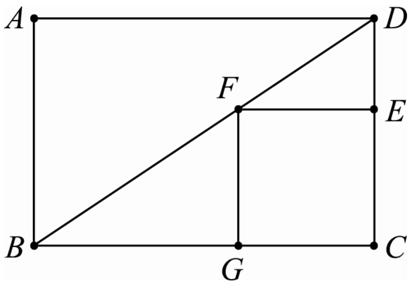



4. 有一道算式：「資優教育＝資優×學習＋更努力」。在算式中，不同的文字代表一個不同的數字，相同的文字代表一個相同的數字，則「資優教育」這個四位數的值最大是 ________。

5. 我們可以將大數拆成兩個以上（含）連續自然數的和，例如：$102 = 33 + 34 + 35$。請問：2010 可以有 ________ 種不同的拆法。

6. 如果將 5 個連續自然數以＋、－、×、÷和（ ）進行基本運算，在可以任意調整連續自然數運算排列順序的條件下，1 至 15 的自然數所組成的 11 組 5 個連續自然數，其中有 ＿＿＿＿＿ 組運算結果可以得到 1。

7. 用三個直角三角形和一個正方形可以緊密的合併成如圖所示的長方形 $ABCD$。若線段 $\overline{AB}=x+3$，線段 $\overline{AD}=2x+6$，且△$BFG$ 的面積為 64 平方單位，則長方形 $ABCD$ 的周長為 ＿＿＿＿＿單位。

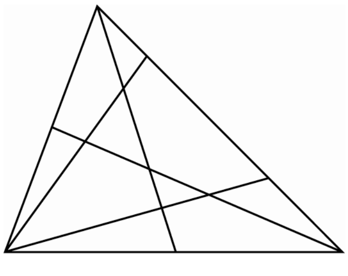



8. 如圖，有一個$4\times4$的方格，它是由 1 到 16 的數字填入，使得每一直行上、每一橫行上、每條對角線上的數字和，恰好形成 10 個連續整數。請問「＊」號所在的方格內應填 ＿＿＿＿＿（哪個數字）。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | | 5 | |
| ＊ | 10 | 4 | |
| 1 | 8 | 14 | |
| 9 | 16 | 7 | 3 |

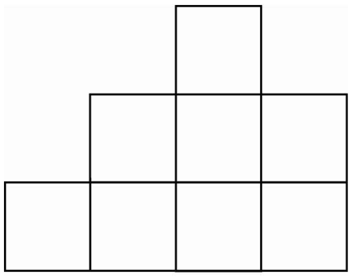
9. 設聯立方程式$\begin{cases}2^x+3^y+5^z=18\\2^x-3^y-5^{z+1}=-30\end{cases}$，已知$A=2^{x-1}+3^{y-1}+5^{z+1}$，求 $A$ 的範圍是 ＿＿＿＿＿。

10. 如圖，有很多大大小小的三角形，這些三角形有的是單獨顯現的，有的是合併若干區塊才得到的，這些位置不完全相同的三角形共有 ＿＿＿＿＿ 個。



11. <u>怡榮號</u>渡輪時速 40 千米，單數日由 $A$ 地順流航行到 $B$ 地，雙數日由 $B$ 地逆流航行到 $A$ 地。（水速為每小時 24 千米）有一單數日渡輪航行到途中的 $C$ 地時，失去動力，只能任船漂流到 $B$ 地，船長計得該日所用的時間為原單數日的 $\frac{43}{18}$ 倍；另一雙數日渡輪航行到途中的 $C$ 地時，又失去動力，船在漂流過程中，維修人員全力搶修了 1 小時後船以 2 倍時速前進到 $A$ 地，結果船長發現該日所用的時間與原雙數日所用時間一秒不差。請問 $A$、$B$ 兩地的距離為 ＿＿＿＿＿ 千米。

12. 老師用 10 個 1×1×1 公分的小正立方體擺出一個立體圖形，它的正視圖如圖所示，且圖中任兩相鄰的小正立方體至少有一稜邊（1 公分）共用，或有一面（1×1 公分）共用。請問此立體圖形的左視圖有 ＿＿＿＿＿ 種。（小正立方體擺放時不得懸空，每一小正立方體的稜邊與水平線垂直或平行）



## 參考答案

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 8：9 | 140 | 8753 | 7 | 11 |
| **7.** | **8.** | **9.** | **10.** | **11.** | **12.** |
| 72 | 11 | $20 < A < 45$ | 29 | 192 | 138 |

數學與猜想—

# 數學期望值

江慶昆／台中市衛道中學退休教師

## ※ 楔子 》

有一天，我與茶博士劉老師聊天。他說以前曾經考過品茶師，是這樣考的：每個人前面放 10 種不同的茶，各兩杯，分前後兩排；品嚐後，把相同的茶配成對，據說配成功 6 對就可成爲品茶師。那麼，如果有一個人，他胡亂配對，則他配成功的杯數的數學期望值是多少？

我把問題丟到數學討論群好幾天，沒有下文，於是決心自己把它搞定。（數學討論群網址：http://mathforum.org/kb/forum.jspa?forumID=13）

## ※ 01 預備定理 》

$n$ 對茶，任意配對，全部都配錯的情形有幾種？

假設有 $A_1,a_1,A_2,a_2,\cdots,A_n,a_n$ 共 $n$ 對茶，$S_i=\left\{A_i與a_i配成功的配對情形\right\}$，根據排容原理，

則 全部都配錯的情形的個數

$$=\left|S_1'\cap S_2'\cap\cdots\cap S_n'\right|=\left|\left(S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n\right)'\right|=n!-\left|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n\right|$$

$$=n!-\left\{\sum_i\left|S_i\right|-\sum_{i<j}\left|S_i\cap S_j\right|+\sum_{i<j<k}\left|S_i\cap S_j\cap S_k\right|-\cdots+(-1)^{n-1}\left|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\right|\right\}$$

$$=n!-C_1^n(n-1)!+C_2^n(n-2)!-\cdots+(-1)^{n-1}$$

$$=C_2^n(n-2)!-\cdots+(-1)^{n-1}.$$

## ※ 02 合情猜測 》

假設 $E(n)=n$ 對茶配對成功的數目的期望值，則

(1) $E(1)=1$

(2) $n=2$ 時，$A,B$ 與 $a,b$ 配對：

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |

$$E(2)=0\times\frac{1}{2}+1\times 0+2\times\frac{1}{2}=1.$$

(3) $n=3$時，$A,B,C$與$a,b,c$配對：

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | 0 | $\frac{1}{6}$ |

$E(3)=1\times\frac{3}{6}+3\times\frac{1}{6}=1$.

(4) $n=4$時，$A,B,C,D$與$a,b,c,d$配對：

$p_0=\frac{1}{4!}\times\left\{4!-C_1^4\times3!+C_2^4\times2!-C_3^4\times1!+1\right\}=\frac{9}{24}$,

$p_1=\frac{1}{4!}\times C_1^4\times\left\{3!-C_1^3\times2!+C_2^3\times1!-1\right\}=\frac{8}{24}$,

$p_2=\frac{1}{4!}\times C_2^4\times\left\{2!-C_1^2\times1!+1\right\}=\frac{6}{24}$,

$p_3=0$,

$p_4=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$,

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{9}{24}$ | $\frac{8}{24}$ | $\frac{6}{24}$ | 0 | $\frac{1}{24}$ |

$E(4)=\frac{8+12+4}{24}=1$.

所以，合情的猜測是$E(n)=1$。

## ※ 03 更多證據，加強信心 》

$n=5$時，

$p_0=\frac{1}{5!}\left\{C_2^5\times3!-C_3^5\times2!+C_4^5\times1!-1\right\}=\frac{44}{120}$,

$p_1=\frac{1}{5!}\times C_1^5\times\left\{C_2^4\times2!-C_3^4\times1!+1\right\}=\frac{45}{120}$,

$p_2=\frac{1}{5!}\times C_2^5\times\left\{C_2^3\times1!-1\right\}=\frac{20}{120}$,

$p_3=\frac{1}{5!}\times C_3^5=\frac{10}{120}$,

$p_4=0$,

$p_5=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$,

$E(5)=0\times\frac{44}{120}+1\times\frac{45}{120}+2\times\frac{20}{120}+3\times\frac{10}{120}+4\times0+5\times\frac{1}{120}=1$.

## ※ 04 專注，尋找規律 》

$n=6$時，

$$p_0=\frac{1}{6!}\left\{6!-C_1^6\times5!+C_2^6\times4!-C_3^6\times3!+C_4^6\times2!-C_5^6\times1!+C_6^6\times0!\right\}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!},$$

$$p_1=\frac{C_1^6}{6!}\left\{5!-C_1^5\times4!+C_2^5\times3!-C_3^5\times2!+C_4^5\times1!-C_5^5\times0!\right\}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!},$$

$$p_2=\frac{C_2^6}{6!}\left\{4!-C_1^4\times3!+C_2^4\times2!-C_3^4\times1!+C_0^4\times0!\right\}=\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right),$$

$$p_3=\frac{C_3^6}{6!}\left\{3!-C_1^3\times2!+C_2^3\times1!-C_3^3\times0!\right\}=\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right),$$

$$p_4=\frac{C_4^6}{6!}\left\{2!-C_1^2\times1!+C_2^2\times0!\right\}=\frac{1}{4!}\times\frac{1}{2!},$$

$$p_5=\frac{C_5^6}{6!}\left\{1!-C_1^1\times0!\right\}=0,$$

$$p_6=\frac{C_6^6}{6!}=\frac{1}{6!},$$

$$\begin{aligned}E(6)&=0\times p_0+1\times p_1+2\times p_2+\cdots+6\times p_6\\&=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\frac{1}{3!}\times\frac{1}{2!}+0+\frac{1}{5!}.\end{aligned}$$

同理可得，

$$\begin{aligned}E(7)&=0\times q_0+1\times q_1+2\times q_2+\cdots+7\times q_7\\&=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\frac{1}{4!}\times\frac{1}{2!}+0+\frac{1}{6!}.\end{aligned}$$

我們看到

$$\begin{aligned}E(7)-E(6)&=\frac{1}{6!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{2!4!}-\frac{1}{3!3!}+\frac{1}{4!2!}-\frac{1}{5!1!}+\frac{1}{6!}\\&=\frac{1}{6!}\left(C_0^6-C_1^6+C_2^6-C_3^6+C_4^6-C_5^6+C_6^6\right)=0.\end{aligned}$$

……（後記 1）

## ※ 05 預言與證明 》

> 我們相信 $E(n+1)-E(n)=0$ 。

若此式成立，因爲 $E(1)=1$ ，則 $E(n)=1$ 對所有的 $n$ 都成立，對一般的 $n$ 而言，

$$p_0=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!},\quad p_1=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!},$$

$$p_2=\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}\right),\cdots,\quad p_i=\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!}\right),$$

$$E(n)=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{(i-1)!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!}\right)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!},$$

$$E(n+1)=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^{n}\frac{1}{n!}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{(i-1)!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!}+(-1)^{n-i+1}\frac{1}{(n-i+1)!}\right)+\cdots+\frac{1}{n!},$$

$$E(n+1)-E(n)=(-1)^{n}\left\{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{3!}\times\frac{1}{(n-3)!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{n!}\right\}$$

$$=\frac{(-1)^{n}}{n!}\left\{C_0^n-C_1^n+C_2^n-\cdots+(-1)^{n}C_n^n\right\},$$

考慮$(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n$，取$x=-1$，得知上式$E(n+1)-E(n)=0$。

## ※ 06 後記 》

1. $(1+x)^6=C_0^6+C_1^6x+C_2^6x^2+C_3^6x^3+C_4^6x^4+C_5^6x^5+C_6^6x^6$，取$x=-1$，得

   $\frac{1}{6!}\left(C_0^6-C_1^6+C_2^6-C_3^6+C_4^6-C_5^6-C_6^6\right)=0$。

2. 我們這麼說，前面有 10 杯茶，我拿另一杯來配對，則配成對的期望值爲$\frac{1}{10}$，所以我拿 10 杯，則配成對的期望值爲$10\times\frac{1}{10}=1$，這算是直觀且正確的看法嗎？在這個對所謂證明有嚴格要求的時代，我想，那是直觀但不是好的證明。
3. 與茶博士劉福榮老師的談話是 1998 年 8 月 4 日的事，一晃十多年，把這篇文章寫好，算是了一番心事。
4. 整個問題的完成，我採匈牙利數學家波利亞(G. Polya)在《數學與猜想》一書中建議的途徑進行。

# 插值多項式

葉善雲／台北市東山高中

## ＊＊ 摘要

高中數學 99 課程綱要納入新教材「插值多項式」，求圖形通過 $x$ 坐標不同的 $n$ 個點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 的最低次多項式；一般都用「Lagrange 插值多項式」來處理，傳統的「Newton 插值多項式」反而被忽略了。有鑑於此，筆者推導出多項式

$$f(x) = c_{n-1}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) + c_{n-2}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2}) + \cdots$$
$$+c_2(x-x_1)(x-x_2) + c_1(x-x_1) + c_0$$

的各項係數。

## ＊＊內文

圖形通過 2 個相異點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，其中 $x_1 \neq x_2$，的一次多項式為

（直線的點斜式） $f(x) = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1) + y_1$；

上面的多項式也可以表示成

（Lagrange 形式） $f(x) = y_1 \cdot \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$，

或

（Newton 形式） $f(x) = \left( \dfrac{y_1}{x_1 - x_2} + \dfrac{y_2}{x_2 - x_1} \right)(x - x_1) + y_1$。

而要找圖形通過 $x$ 坐標不同的 3 個點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 的最低次多項式，常用的方法有下列三種：

**甲、用「解方程組方法」求過 3 個點的最低次多項式**

設多項式為 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$，將 3 個點代入多項式，然後解方程組可得

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)}, a_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)}, a_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_1 - x_3)}.$$

**乙、用「Lagrange 形式」求過 3 個點的最低次多項式**

設多項式爲 $f(x)=b_3\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)+b_2\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)+b_1\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$，將 3 個點代入多項式後，可得

$$b_3=\frac{y_3}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)},b_2=\frac{y_2}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_3\right)},b_1=\frac{y_1}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}.$$

**丙、用「Newton 形式」求過 3 個點的最低次多項式**

設多項式爲 $f(x)=c_2\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)+c_1\left(x-x_1\right)+c_0$，將 3 個點代入多項式後，可得

$$c_0=y_1,c_1=\frac{y_1}{x_1-x_2}+\frac{y_2}{x_2-x_1},c_2=\frac{y_1}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\frac{y_2}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_3\right)}+\frac{y_3}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}.$$

一般而言，欲求圖形通過 $x$ 坐標不同的 $n$ 個點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 的最低次多項式，仍可設多項式爲

$$f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

或

$$\begin{aligned}f(x)=&b_n\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-2}\right)\left(x-x_{n-1}\right)+b_{n-1}\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-2}\right)\left(x-x_n\right)\\&+\cdots+b_2\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)\left(x-x_n\right)+b_1\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)\left(x-x_n\right),\end{aligned}$$

或

$$f(x)=c_{n-1}\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)+c_{n-2}\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-2}\right)+\cdots+c_1\left(x-x_1\right)+c_0,$$

然後將各個點代入多項式，再解出各係數。
此處，我們僅討論 Lagrange 形式與 Newton 形式：

**甲、用「Lagrange 形式」求過 *n* 個點的最低次多項式**

將 $(x_1,y_1)$ 代入多項式後，可得 $b_1=\dfrac{y_1}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)\left(x_1-x_4\right)\cdots\left(x_1-x_{n-1}\right)\left(x_1-x_n\right)}$；

將 $(x_2,y_2)$ 代入多項式後，可得 $b_2=\dfrac{y_2}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_3\right)\left(x_2-x_4\right)\cdots\left(x_2-x_{n-1}\right)\left(x_2-x_n\right)}$；

$$\vdots$$

將 $(x_{n-1},y_{n-1})$ 代入多項式後，可得 $b_{n-1}=\dfrac{y_{n-1}}{\left(x_{n-1}-x_1\right)\left(x_{n-1}-x_2\right)\cdots\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)\left(x_{n-1}-x_n\right)}$；

將 $(x_n,y_n)$ 代入多項式後，可得 $b_n=\dfrac{y_n}{\left(x_n-x_1\right)\left(x_n-x_2\right)\left(x_n-x_3\right)\cdots\left(x_n-x_{n-2}\right)\left(x_n-x_{n-1}\right)}$，

於是我們得到過 $n$ 個點的最低次多項式。

◎ 定理一：**Lagrange 插值多項式**

設圖形通過 $x$ 坐標不同的 $n$ 個點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 的最低次多項式為

$$f(x)=b_n\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-2}\right)\left(x-x_{n-1}\right)+b_{n-1}\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-2}\right)\left(x-x_n\right)$$

$$+\cdots+b_2\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)\left(x-x_n\right)+b_1\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)\left(x-x_n\right),$$

則 $b_i=\dfrac{y_i}{\prod\limits_{1\le k\le n,k\ne i}\left(x_i-x_k\right)}$，其中 $i=1,2,3,\cdots,n$ 。

**乙、用「Newton 形式」求過 *n* 個點的最低次多項式**

設多項式為

$$f(x)=c_{n-1}\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)+c_{n-2}\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_{n-2}\right)+\cdots$$

$$+c_3\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)+c_2\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)+c_1\left(x-x_1\right)+c_0,$$

將 $(x_1,y_1)$ 代入多項式後，可得 $c_0=y_1$；

將 $(x_2,y_2)$ 代入多項式後，可得 $c_1=\dfrac{y_2-c_0}{x_2-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1}{x_1-x_2}+\dfrac{y_2}{x_2-x_1}$ ；

將 $(x_3,y_3)$ 代入多項式後，可得

$$c_2=\frac{1}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}\cdot\left[y_3-c_1\left(x_3-x_1\right)-c_0\right]$$

$$=\frac{1}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}\cdot\left[y_3-\left(\frac{y_1}{x_1-x_2}+\frac{y_2}{x_2-x_1}\right)\left(x_3-x_1\right)-y_1\right]$$

$$=\frac{y_3}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}-\frac{y_2}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}-\frac{y_1}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}\cdot\left(\frac{x_3-x_1}{x_1-x_2}+\frac{x_1-x_2}{x_1-x_2}\right)$$

$$=\frac{y_3}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}+\frac{y_2}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_3\right)}-\frac{y_1\left(x_3-x_2\right)}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)\left(x_1-x_2\right)}$$

$$=\frac{y_1}{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}+\frac{y_2}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_3\right)}+\frac{y_3}{\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}.$$

至於一般的 $c_i$ ，我們用底下的定理來描述：

◎ 定理二：**Newton 插值多項式**

設圖形通過 $x$ 坐標不同的 $n$ 個點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 的最低次多項式為 $f_n(x)$ ，則圖形通過 $x$ 坐標不同的 $n+1$ 個點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),(x_{n+1},y_{n+1})$ 的最低次多項式為

$f_{n+1}(x)=c_n\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\cdots\left(x-x_n\right)+f_n(x)$ ，其中 $c_n=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\dfrac{y_i}{\prod\limits_{1\le k\le n+1,k\ne i}\left(x_i-x_k\right)}$ 。

例如：

通過 $x$ 坐標不同的 4 個點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ 的最低次多項式爲

$$f_4(x) = c_3\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\left(x - x_3\right) + c_2\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \left(x - x_1\right) + y_1,$$

其中

$$c_2 = \frac{y_1}{\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 - x_3\right)} + \frac{y_2}{\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 - x_3\right)} + \frac{y_3}{\left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right)},$$

$$c_3 = \frac{y_1}{\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 - x_3\right)\left(x_1 - x_4\right)} + \frac{y_2}{\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 - x_3\right)\left(x_2 - x_4\right)} + \frac{y_3}{\left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right)\left(x_3 - x_4\right)}$$

$$+ \frac{y_4}{\left(x_4 - x_1\right)\left(x_4 - x_2\right)\left(x_4 - x_3\right)}.$$

證明：

設 $f_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\prod_{1 \le k \le n+1, k \ne i} \left(x_i - x_k\right)} \cdot \left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) \cdots \left(x - x_n\right) + f_n(x)$ ，則顯然

$$f_{n+1}(x_1) = f_n(x_1) = y_1, f_{n+1}(x_2) = f_n(x_2) = y_2, \cdots, \ f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) = y_n,$$

而

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\prod_{1 \le k \le n+1, k \ne i} \left(x_i - x_k\right)} \cdot \left(x_{n+1} - x_1\right)\left(x_{n+1} - x_2\right) \cdots \left(x_{n+1} - x_n\right)$$

$$= f_n(x_{n+1}) + y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\prod_{1 \le k \le n+1, k \ne i} \left(x_i - x_k\right)} \cdot \left(x_{n+1} - x_1\right)\left(x_{n+1} - x_2\right) \cdots \left(x_{n+1} - x_n\right)$$

$$= f_n(x_{n+1}) + y_{n+1} + y_1 \cdot \frac{\left(x_{n+1} - x_2\right)\left(x_{n+1} - x_3\right) \cdots \left(x_{n+1} - x_{n-1}\right)\left(x_{n+1} - x_n\right)\left(x_{n+1} - x_1\right)}{\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 - x_3\right) \cdots \left(x_1 - x_{n-1}\right)\left(x_1 - x_n\right)\left(x_1 - x_{n+1}\right)}$$

$$+ y_2 \cdot \frac{\left(x_{n+1} - x_1\right)\left(x_{n+1} - x_3\right)\left(x_{n+1} - x_4\right) \cdots \left(x_{n+1} - x_{n-1}\right)\left(x_{n+1} - x_n\right)\left(x_{n+1} - x_2\right)}{\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 - x_3\right)\left(x_2 - x_4\right) \cdots \left(x_2 - x_{n-1}\right)\left(x_2 - x_n\right)\left(x_2 - x_{n+1}\right)}$$

$$+ y_3 \cdot \frac{\left(x_{n+1} - x_1\right)\left(x_{n+1} - x_2\right)\left(x_{n+1} - x_4\right) \cdots \left(x_{n+1} - x_{n-1}\right)\left(x_{n+1} - x_n\right)\left(x_{n+1} - x_3\right)}{\left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right)\left(x_3 - x_4\right) \cdots \left(x_3 - x_{n-1}\right)\left(x_3 - x_n\right)\left(x_3 - x_{n+1}\right)}$$

$$+ \cdots + y_{n-1} \cdot \frac{\left(x_{n+1} - x_1\right)\left(x_{n+1} - x_2\right) \cdots \left(x_{n+1} - x_{n-2}\right)\left(x_{n+1} - x_n\right)\left(x_{n+1} - x_{n-1}\right)}{\left(x_{n-1} - x_1\right)\left(x_{n-1} - x_2\right) \cdots \left(x_{n-1} - x_{n-2}\right)\left(x_{n-1} - x_n\right)\left(x_{n-1} - x_{n+1}\right)}$$

$$+ y_n \cdot \frac{\left(x_{n+1} - x_1\right)\left(x_{n+1} - x_2\right) \cdots \left(x_{n+1} - x_{n-1}\right)\left(x_{n+1} - x_n\right)}{\left(x_n - x_1\right)\left(x_n - x_2\right) \cdots \left(x_n - x_{n-1}\right)\left(x_n - x_{n+1}\right)}$$

$$= f_n(x_{n+1}) + y_{n+1} - y_1 \cdot \frac{(x_{n+1}-x_2)(x_{n+1}-x_3)\cdots(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)}$$

$$-y_2 \cdot \frac{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_3)(x_{n+1}-x_4)\cdots(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)}$$

$$-y_3 \cdot \frac{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)(x_{n+1}-x_4)\cdots(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_{n-1})(x_3-x_n)}$$

$$-\cdots - y_{n-1} \cdot \frac{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_{n-2})(x_{n+1}-x_n)}{(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)}$$

$$-y_n \cdot \frac{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

$$= y_{n+1} + f_n(x_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \frac{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_{i-1})(x_{n+1}-x_{i+1})\cdots(x_{n+1}-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$= y_{n+1},$$

因爲由 Lagrange 插值多項式知

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},$$

故 $f_n(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \frac{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_{i-1})(x_{n+1}-x_{i+1})\cdots(x_{n+1}-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$ ，

所以 $f_{n+1}(x)$ 的圖形通過點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),(x_{n+1},y_{n+1})$ 。

**例如：**

欲求過 $A(1,5),B(2,7),C(3,11),D(4,-1)$ 的最低次多項式，可設

$$f_4(x) = c_3(x-1)(x-2)(x-3) + c_2(x-1)(x-2) + c_1(x-1) + 5,$$

則

$$c_1 = \frac{5-7}{1-2} = 2,\quad c_2 = \frac{5}{(1-2)(1-3)} + \frac{7}{(2-1)(2-3)} + \frac{11}{(3-1)(3-2)} = \frac{5}{2} - 7 + \frac{11}{2} = 1,$$

$$c_3 = \frac{5}{(1-2)(1-3)(1-4)} + \frac{7}{(2-1)(2-3)(2-4)} + \frac{11}{(3-1)(3-2)(3-4)} + \frac{-1}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$$= -\frac{5}{6} + \frac{7}{2} - \frac{11}{2} - \frac{1}{6} = -3,$$

得 $f_4(x) = -3(x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2) + 2(x-1) + 5$ 。

**推論：**

設圖形通過$n$個點$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$的最低次多項式為$f_n(x)$，若$(x_{n+1},y_{n+1})$在$y=f_n(x)$的圖形上，則$c_n=\sum_{i=1}^{n+1}\dfrac{y_i}{\prod_{1\le k\le n+1,k\ne i}(x_i-x_k)}=0$。

**例如：**

(1) 若已知圖形通過$A(1,-2),B(2,1),C(3,18),D(4,61)$的最低次多項式為$f(x)$，試求$f(5)$之值。

**Sol** 設圖形通過$A,B,C,D,E(5,f(5))$的最低次多項式為

$$f_5(x)=c_4(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+f(x),$$

則$c_4=0$，即

$$c_4=\frac{-2}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}+\frac{1}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}+\frac{18}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}+\frac{61}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}+\frac{f(5)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}=0,$$

得$f(5)=(-24)\times\left(\dfrac{-2}{24}+\dfrac{1}{-6}+\dfrac{18}{4}+\dfrac{61}{-6}\right)=2+4-108+244=142$。

(2) 若已知圖形通過$A(2007,-2),B(2008,1),C(2009,18),D(2010,49)$的最低次多項式為$f(x)$，試求$f(2012)$之值。

（說明：此處$f(x)=7(x-2007)(x-2008)+3(x-2007)-2$為二次式）

**Sol** 設圖形通過$A,B,C,D,E(2012,f(2012))$的最低次多項式為

$$f_5(x)=c_4(x-2007)(x-2008)(x-2009)(x-2010)+f(x),$$

則$c_4=0$，即

$$c_4=\frac{-2}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-5)}+\frac{1}{1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)}+\frac{18}{2\cdot1\cdot(-1)\cdot(-3)}+\frac{49}{3\cdot2\cdot1\cdot(-2)}+\frac{f(2012)}{5\cdot4\cdot3\cdot2}=0,$$

得$f(2012)=(-120)\times\left(\dfrac{-2}{30}+\dfrac{1}{-8}+\dfrac{18}{6}+\dfrac{49}{-12}\right)=8+15-360+490=153$。

國立台灣師範大學數學系

# 99學年度甄選入學指定項目甄試試題

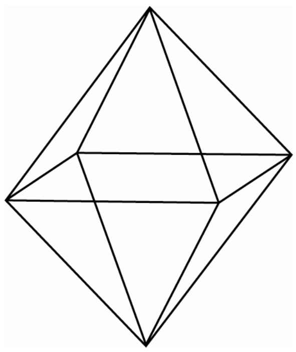
## 筆試一、計算證明題（考試時間：2 小時）

1. 在$\triangle ABC$ 中，令$a=\overline{BC}, b=\overline{CA}, c=\overline{AB}$
   (1) 試敘述並證明$\triangle ABC$ 的正弦定律。（10 分）
   (2) 試敘述並證明$\triangle ABC$ 的餘弦定律。（10 分）

2. 設 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x+1 & 2x^2+3x+3 \\ x-1 & 3x & 2x^2+7x \\ 2x^2 & 5x-2 & 12x^2+10x-12 \end{vmatrix}$
   (1) 試將$f(x)$表成$x$的多項式。（10 分）
   (2) 試求方程式$f(x)=0$的所有實根。（10 分）

3. 設$a$爲一正實數，而方程式$x^2+y^2+z^2-2ax-10y-18z-a^2-16a+65=0$的圖形是空間中一個半徑爲 9 的球面
   (1) 試求正實數$a$的值。（8 分）
   (2) 試求此球面與平面$x+4y+8z-13=0$的交點坐標。（12 分）

4. 下圖爲一個正八面體。一隻螞蟻自正八面體上方的頂點出發，沿著正八面體的稜邊爬行。在每個頂點處牠會從四條稜邊中隨機地選擇一條向另一頂點前進，直到抵達下方的頂點爲止。



   (1) 螞蟻只爬行兩條稜邊就抵達下方頂點的機率爲何？（5 分）
   (2) 螞蟻爬行三條稜邊才抵達下方頂點的機率爲何？（5 分）
   (3) 螞蟻自上方頂點爬行到下方頂點，所經過的稜邊數的期望值爲何？（10 分）

5. 給定坐標平面上一點$A(16,6)$及二直線$l_1: y=-2$與$l_2: 24x-7y+50=0$
   (1) 過點$A$且與直線$l_1$相切的所有圓圓心構成一曲線，試求其方程式。（10 分）
   (2) 試求過點$A$且與直線$l_1$、$l_2$都相切的所有圓的方程式。（10 分）

**筆試二、填充題**（考試時間：1.5 小時）

1. 試求滿足 $\frac{2}{m}+\frac{3}{n}=\frac{1}{6}$ 且 $m$ 爲奇數的所有正整數序對 $(m,n)=$ ________。

2. 設 $x$ 與 $y$ 爲滿足 $x+2y=8$ 的兩個正數，試求 $\log_2 x+\log_2 y$ 的最大值爲 ________。

3. 已知 $c$ 爲一實數，使方程式 $4x^3+(c-1)x-(3+c)=0$ 恰好有一實根，則 $c$ 的範圍爲 ________。

4. 只用 1,3,3,7,7,9,9,9 八個數字排成一個八位數，且比 50000000 大。試問這樣的數有 ________個。

5. 試求 $1^3+4^3+7^3+10^3+13^3+16^3+19^3+22^3+25^3+28^3+31^3+34^3+37^3+40^3+43^3=$ ________。

6. 一個正八邊形，其頂點 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8$ 皆落在單位圓 $C$ 上，點 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 爲圓 $C$ 上一點，則 $\left|\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{PA_k}\right|=$ ________。

7. 設 $P$ 與 $Q$ 爲橢圓 $x^2+4y^2-2x-12y+6=0$ 上的兩點且 $\overline{PQ}$ 的中點爲 $(2,2)$，則直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的方程式爲 ________。

8. 設四面體 $ABCD$ 的稜長分別爲 $\overline{AB}=\overline{BD}=\overline{DC}=\overline{CA}=3$, $\overline{AD}=\overline{BC}=4$，則線段 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 之間的距離爲 ________。

9. 爸爸買 10 個白色彈珠和 10 個黑色彈珠給兩兄妹；哥哥拿到 4 個白色彈珠和 7 個黑色彈珠，剩下的歸妹妹。爸爸擲一個公正的銅板，如果是正面，就從哥哥的彈珠中任取一個；反之，就從妹妹的彈珠中任取一個。若爸爸拿到的彈珠是白色彈珠，則這個彈珠是從妹妹那裡拿的機率爲 ________。

10. 某班級有 40 位學生，第一次段考數學平均爲 62 分，標準差爲 3 分；老師欲調整成績，打算將每位學生的原始成績除以 2，然後再加 50 分，當作新的成績。試問新成績的變異係數爲 ________%。（空格內的數採四捨五入取到小數點後第二位）

【標準差公式 $S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$ ；變異係數公式 $C.V.=\frac{S}{\overline{X}}\times 100\%$ 】

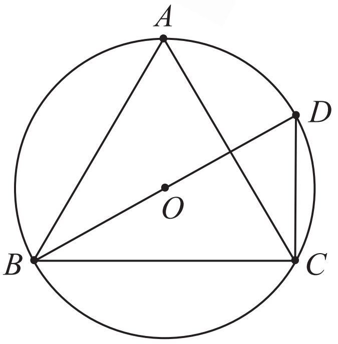
**筆試一、計算證明題**

1. (1) 正弦定律：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

**證明：** 做△$ABC$的外接圓，

令$O$為圓心、$R$為半徑，

並做$\overrightarrow{BO}$延伸線交圓於$D$點，如圖所示：




因為為直徑，所以$\angle BCD$為直角；

又因為$\angle BAC$（記為$A$）和

$\angle BDC$（記為$D$）為對同弧的圓周角，

所以$A=D$。

在△$BCD$中，由正弦函數的定義知$\sin D=\dfrac{a}{2R}$，

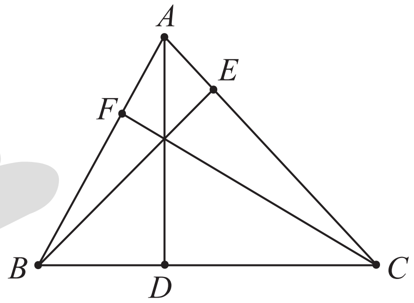
又由$\angle A=\angle D$知$\sin A=\sin D=\dfrac{a}{2R}$，故$\dfrac{a}{\sin\ A}=2R$。

同理可得$\dfrac{a}{\sin\ A}=\dfrac{b}{\sin\ B}=\dfrac{c}{\sin\ C}=2R$。

綜合得證正弦定律。

(2) 餘弦定律：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

**證明：** 在△$ABC$中分別做




頂點$A$在$\overline{BC}$上的垂足$D$；

頂點$B$在$\overline{AC}$上的垂足$E$；

頂點C在$\overline{AB}$上的垂足$F$，

如圖所示：

由直角三角形上的餘弦函數之定義可知

$$\begin{cases} a=\overline{BD}+\overline{CD} \\ b=\overline{CE}+\overline{AE} \\ c=\overline{AF}+\overline{BF} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c\cos B\ +\ b\cos C\cdots\cdots ① \\ b=a\cos C\ +\ c\cos A\cdots\cdots ② \\ c=a\cos B\ +\ b\cos A\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

將②×$b$+③×$c$得

$$\begin{aligned} b^2+c^2 &= ab\cos C+bc\cos A+ac\cos B+bc\cos A \\ &= a\left(b\cos C+c\cos B\right)+2bc\cos A \\ &= a^2+2bc\cos A. \end{aligned}$$

移項後得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，餘弦定律得證。

2. (1) 將行列式直接展開，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x+1 & 2x^2+3x+3 \\ x-1 & 3x & 2x^2+7x \\ 2x^2 & 5x-2 & 12x^2+10x-12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &=3x^2\left(12x^2+10x-12\right)+\left(2x^3+2x^2\right)\left(2x^2+7x\right)+\left(5x^2-7x+2\right)\left(2x^2+3x+3\right) \\ &\quad-6x^3\left(2x^2+3x+3\right)-\left(5x^2-2x\right)\left(2x^2+7x\right)-\left(x^2-1\right)\left(12x^2+10x-12\right) \\ &=-8x^5+24x^4-14x^3-5x-6. \end{aligned}$$

(2) 利用綜合除法

$$\begin{array}{rrrrrr|l} -8 & +24 & -14 & +0 & -5 & -6 & 2 \\ & -16 & 16 & 4 & 8 & 6 & \\ \hline -8 & 8 & 2 & 4 & 3 & 0 & \end{array}$$

得 $f(2)=0$。

同樣，由綜合除法

$$\begin{array}{rrrrr|l} -8 & +8 & +2 & +4 & +3 & \frac{3}{2} \\ & -12 & -6 & -6 & -3 & \\ \hline -8 & -4 & -4 & -2 & 0 & \end{array}$$

可得 $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$；

再由綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|l} -8 & -4 & -4 & -2 & -\frac{1}{2} \\ & 4 & 0 & 2 & \\ \hline -8 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

可得 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$。

因此，多項式 $f(x)$ 可因式分解爲

$$f(x)=-8x^5+24x^4-14x^3-5x-6=\left(x-2\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(-8x^2-4\right).$$

故 $f(x)=0$ 的實根爲 $x=2,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$。

3. (1) 將方程式 $x^2+y^2+z^2-2ax-10y-18z-a^2-16a+65=0$ 配方得到

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-5\right)^2+\left(z-9\right)^2=2a^2+16a+41.$$

因爲球面的半徑爲 9，所以 $2a^2+16a+41=9^2=81$，解得

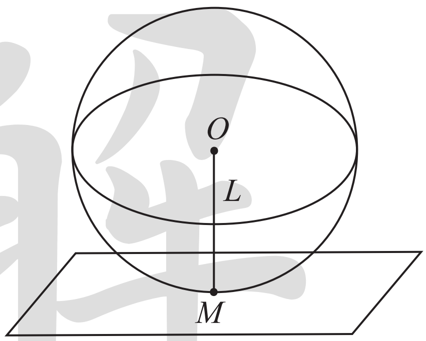
$$a=2,-10.$$

因爲 $a$ 爲正實數，所以 $a=2$。

(2) 由(1)知球心 $O$ 的坐標爲 $(2,5,9)$ ，半徑爲 9，又球心與平面 $x+4y+8z-13=0$ 的距離爲

$$\frac{|2+4\times5+8\times9-13|}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}}=9,$$

即平面 $x+4y+8z-13=0$ 與球面相切，令切點爲 $M$ 。



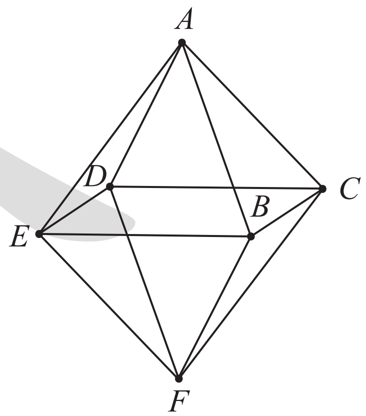

又因爲平面 $x+4y+8z-13=0$ 的法向量 $\overrightarrow{OM}=(1,4,8)$ ，所以過球心 $O$ 又與平面 $x+4y+8z-13=0$ 垂直的直線 $L$ 爲

$$L:\begin{cases}x=2+t\\ y=5+4t,\ t\in\mathbb{R}.\\ z=9+8t\end{cases}$$

將 $L$ 參數式代入平面 $x+4y+8z-13=0$ 可得 $(2+t)+4(5+4t)+8(9+8t)-13=0$ ，

解得 $t=-1$ ，再將 $t=-1$ 代入參數式，得交點 $M=(1,1,1)$ 。

4. (1) 由




$A$ 至 $B$ 至 $F$ 的機率爲 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ ；

$A$ 至 $C$ 至 $F$ 的機率爲 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ ；

$A$ 至 $D$ 至 $F$ 的機率爲 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ ；

$A$ 至 $E$ 至 $F$ 的機率爲 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ ，

知道：只爬行兩稜邊就抵達下方頂點的機率爲

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}.$$

(2) 由

$A$ 至 $B$ 至 $C$ 至 $F$ 的機率爲 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$ ；

$A$ 至 $B$ 至 $E$ 至 $F$ 的機率爲 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$ ，

知道：第一步走至 $B$ 且爬行三稜邊抵達下方頂點的機率爲

$$\frac{1}{64}+\frac{1}{64}=\frac{1}{32}.$$

同理，第一步走至 $C$ 或 $D$ 或 $E$ 且爬行三稜邊抵達下方頂點的機率都是 $\frac{1}{32}$ ，

因此，爬行三稜邊抵達下方頂點的機率爲

$$\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{8}.$$

(3) 設從 $A$ 走至 $F$ 所經過的稜邊數的期望值爲 $E_A$ ，從 $B$（或 $C$ 或 $D$ 或 $E$）走至 $F$ 所經過的稜邊數的期望值爲 $E_B$（或 $E_C$ 或 $E_D$ 或 $E_E$）。我們有

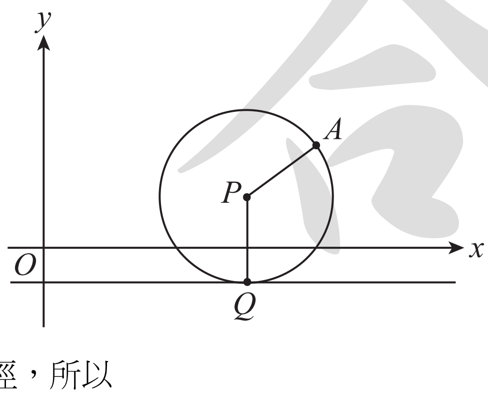
$$\begin{cases} E_B=E_C=E_D=E_E \\ E_A=\frac{1}{4}(1+E_B)+\frac{1}{4}(1+E_C)+\frac{1}{4}(1+E_D)+\frac{1}{4}(1+E_E)=1+E_B \\ E_B=\frac{1}{4}(1+E_A)+\frac{1}{4}(1+E_C)+\frac{1}{4}(1+E_E)+\frac{1}{4}\times 1=1+\frac{E_A}{4}+\frac{E_B}{2} \end{cases}.$$

解得

$$\begin{cases} E_A=6 \\ E_B=E_C=E_D=E_E=5 \end{cases}.$$

故螞蟻自上方頂點爬行到下方頂點所經過的稜邊數的期望值爲 6。

5. (1) 如圖所示，令圓心 $P(x,y)$ 的圓過 $A$ 點且與直線 $y=-2$ 相切於 $Q$ 點。




因爲 $\overline{PA}=\overline{PQ}=$ 半徑，所以

$$\sqrt{(x-16)^2+(y-6)^2}=|y+2|.$$

兩邊平方後可得

$$(x-16)^2+(y-6)^2=(y+2)^2,$$

整理得到 $(x-16)^2=16(y-2)$ 。

(2) 由(1)知：過 $A$ 與直線 $l_1$ 相切的圓之圓心滿足方程式 $(x-16)^2=16(y-2)$，可令該圓心 $O$ 的參數式爲

$$\begin{cases} x=16+4t \\ y=2+t^2 \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

若該圓與直線 $l_1$、直線 $l_2$ 都相切，則 $d(O,l_1)=d(O,l_2)$，即圓心在 $l_1$ 與 $l_2$ 的角平分線上，而 $l_1$ 與 $l_2$ 的角平分線爲

$$y+2=\pm\frac{|24x-7y+50|}{\sqrt{24^2+(-7)^2}}\text{，即 } 4y=3x \text{ 或 } 9y=-12x-50\text{ 。}$$

從圖形的相關位置可判斷：圓心 $O$ 在角平分線 $4y=3x$ 上。

將 $\begin{cases} x=16+4t \\ y=2+t^2 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ 代入 $4y=3x$，得

$$4\left(2+t^2\right)=3\left(16+4t\right) \quad\Rightarrow\quad t^2-3t-10=0 \quad\Rightarrow\quad t=5,-2,$$

將 $t=5,-2$ 分別代入 $\begin{cases} x=16+4t \\ y=2+t^2 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ 可得兩點 $(36,27)$ 與 $(8,6)$。因此

(a) 當圓心爲 $(36,27)$ 時，半徑爲 $(36,27)$ 至 $y=-2$ 的距離 29，

(b) 當圓心爲 $(8,6)$ 時，半徑爲 $(8,6)$ 至 $y=-2$ 的距離 8。

故圓的方程式爲 $\left(x-8\right)^2+\left(y-6\right)^2=64$ 與 $\left(x-36\right)^2+\left(y-27\right)^2=841$。

**筆試二、填充題**（考試時間：1.5 小時）

1. 將$\dfrac{2}{m}+\dfrac{3}{n}=\dfrac{1}{6}$通分，得

$$\frac{2n}{mn}+\frac{3m}{mn}=\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{2n+3m}{mn}=\frac{1}{6}.$$

交叉相乘後，得

$$18m+12n=mn \quad \Rightarrow \quad mn-18m-12n=0.$$

等號兩邊同時加上$12\times 18=216$，得

$$mn-12n-18m+216=216.$$

將等號左邊因式分解，得

$$(m-12)(n-18)=216=\begin{cases} 1\times 216 & =(-1)\times(-216) \\ 2\times 108 & =(-2)\times(-108) \\ 3\times 72 & =(-3)\times(-72) \\ 4\times 54 & =(-4)\times(-54) \\ 6\times 36 & =(-6)\times(-36) \\ 8\times 27 & =(-8)\times(-27) \\ 9\times 24 & =(-9)\times(-24) \\ 12\times 18 & =(-12)\times(-18) \end{cases}.$$

因爲$m$爲奇數，所以$m-12$爲奇數，依照$m-12$與$n-18$的關係可以寫出下列對應表格：

| $m-12$ | 1 | 3 | 9 | 27 | $-1$ | $-3$ | $-9$ | $-27$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 13 | 15 | 21 | 39 | 11 | 9 | 3 | $-15$ |
| $n-18$ | 216 | 72 | 24 | 8 | $-216$ | $-72$ | $-24$ | $-8$ |
| $n$ | 234 | 90 | 42 | 26 | $-198$ | $-54$ | $-6$ | 10 |

因爲$m$ 、$n$皆爲正整數，所以共有四組序對$(13,234),(15,90),(21,42),(39,26)$。

2. 因爲$x$ 、$y$爲正，所以由算術平均大於等於幾何平均可知

$$4=\frac{x+2y}{2}\geq\sqrt{2xy} \quad \Rightarrow \quad xy\leq 8,$$

而且等號在$x=2y$（即$x=4, y=2$）時成立。故

$$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy\leq\log_2 8=3.$$

3. 設多項式 $f(x)=4x^3+(c-1)x-(3+c)$ ，將 $x=1$ 代入，得

$$f(1)=4\times1^3+(c-1)\times1-(3+c)=4+c-1-3-c=0,$$

即 $x=1$ 爲 $4x^3+(c-1)x-(3+c)=0$ 的一實數根，且 $f(x)$ 可因式分解爲

$$f(x)=(x-1)\left[4x^2+4x+(3+c)\right].$$

要求 $4x^3+(c-1)x-(3+c)=0$ 恰好一實根代表 $4x^2+4x+(3+c)=0$ 沒有實根，即

$$4^2-4\times4\times(3+c)<0 \quad\Rightarrow\quad 16-48-16c<0,$$

得 $c>-2$ 。

因此，使 $4x^3+(c-1)x-(3+c)=0$ 恰好一實根的條件爲 $c>-2$ 。

4. 因爲使 $1,3,3,7,7,9,9,9$ 所排出的八位數比 50000000 大，所以最高位數字必須爲 7 或 9。

當最高位爲 7 時，其排法如下：

$$7,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,$$

剩下位置是以 $1,3,3,7,9,9,9$ 做直線排列的方法，共有 $\dfrac{7!}{2!3!}=420$ 種。

當最高位爲 9 時，其排法如下：

$$9,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,\_\_\_,$$

剩下位置是以 $1,3,3,7,7,9,9$ 做直線排列的方法，共有 $\dfrac{7!}{2!2!2!}=630$ 種。

所以使 $1,3,3,7,7,9,9,9$ 所排出的八位數比 50000000 大的所有可能有

$420+630=1050$ 種。

5. 先將級數

$$1^3+4^3+7^3+10^3+13^3+16^3+19^3+22^3+25^3+28^3+31^3+34^3+37^3+40^3+43^3$$

用 $\sum$ 符號表爲 $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(3k-2)^3$ ，再由乘法公式展開，可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}(3k-2)^3&=\sum_{k=1}^{15}27k^3-54k^2+36k-8\\&=27\sum_{k=1}^{15}k^3-54\sum_{k=1}^{15}k^2+36\sum_{k=1}^{15}k-\sum_{k=1}^{15}8\\&=27\times\left(\frac{15\times16}{2}\right)^2-54\times\left(\frac{15\times16\times31}{6}\right)+36\times\left(\frac{15\times16}{2}\right)-8\times15\\&=326040.\end{aligned}$$

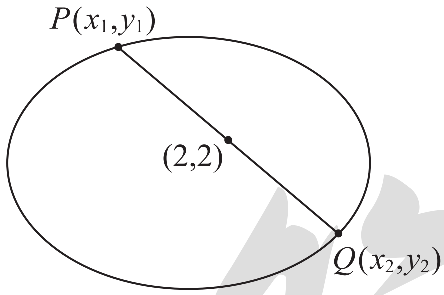
6. 將欲求的式子化簡如下：

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{PA_k}\right| &= \left|\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\overrightarrow{PA_3}+\overrightarrow{PA_4}+\overrightarrow{PA_5}+\overrightarrow{PA_6}+\overrightarrow{PA_7}+\overrightarrow{PA_8}\right| \\ &= \left|\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_1}\right)+\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_2}\right)+\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_3}\right)+\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_4}\right)\right. \\ &\quad \left.+\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_5}\right)+\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_6}\right)+\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_7}\right)+\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_8}\right)\right| \\ &= \left|8\overrightarrow{PO}+\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_6}+\overrightarrow{OA_7}+\overrightarrow{OA_8}\right)\right|.\end{aligned}$$

因爲$O$爲正八邊形的中心點，所以$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_6}+\overrightarrow{OA_7}+\overrightarrow{OA_8}=\overrightarrow{0}$.

因此原式可寫爲$\left|8\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{0}\right|=\left|8\overrightarrow{PO}\right|=8\left|\overrightarrow{PO}\right|$，又因爲正八邊形頂點落在單位圓上，所以$\left|\overrightarrow{PO}\right|=1$，即$\left|\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{PA_k}\right|=8\left|\overrightarrow{PO}\right|=8\times1=8$.

7. 設$P$點坐標爲$(x_1,y_1)$，$Q$點坐標爲$(x_2,y_2)$。




將$P$、$Q$代入橢圓方程式可得

$$\begin{cases}x_1^2+4y_1^2-2x_1-12y_1+6=0\cdots\cdots①\\ x_2^2+4y_2^2-2x_2-12y_2+6=0\cdots\cdots②\end{cases}$$

將①−②可得$(x_1^2-x_2^2)+4(y_1^2-y_2^2)-2(x_1-x_2)-12(y_1-y_2)=0\cdots\cdots③$

因爲$P$、$Q$的中點坐標爲$(2,2)$，所以$x_1+x_2=4, y_1+y_2=4$，

且③可寫成$(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)-2(x_1-x_2)-12(y_1-y_2)=0$。

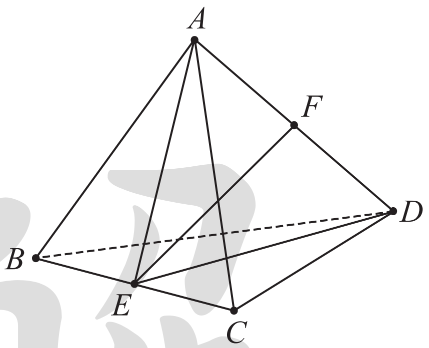
將$x_1+x_2=4, y_1+y_2=4$代入得$4\times(x_1-x_2)+4\times4\times(y_1-y_2)-2(x_1-x_2)-12(y_1-y_2)=0$

即

$$2(x_1-x_2)=-4(y_1-y_2)\ \Rightarrow\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}.$$

因此過$P$、$Q$兩點直線方程式的斜率爲$-\frac{1}{2}$，又因爲過點$(2,2)$，所以此直線方程式爲$y-2=-\frac{1}{2}(x-2)$。

8. 取 $\overline{BC}$ 中點 $E$ 及 $\overline{AD}$ 中點 $F$ ，得 $\overline{BE}=2, \overline{AF}=2$ 。




因爲△ $ABC$ 、△ $DBC$ 都是等腰三角形，所以由畢氏定理可得

$$\overline{AE}=\overline{DE}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}\,.$$

因此△ $ADE$ 亦爲等腰三角形，可得

$$\overline{EF}\perp\overline{AD}\,.$$

由畢氏定理可得 $\overline{EF}=\sqrt{\sqrt{5}^{\,2}-2^2}=1$ ，即可知 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 之間的距離 $\overline{EF}=1$ 。

9. 依題意：哥哥有 4 個白色彈珠，7 個黑色彈珠，妹妹有 6 個白色彈珠，3 個黑色彈珠。

因爲爸爸丟到正面後從哥哥那裡取得白色彈珠的機率爲 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{11}=\frac{2}{11}$ ，

爸爸丟到反面後從妹妹那裡取得白色彈珠的機率爲 $\frac{1}{2}\times\frac{6}{9}=\frac{1}{3}$ ，

所以已知爸爸拿到白色彈珠且該彈珠是從妹妹那裡拿到的機率爲

$$P(\text{從妹妹那裡拿到白色彈珠}\,|\,\text{爸爸拿到白色彈珠})=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{11}+\frac{1}{3}}=\frac{11}{17}.$$

10. 設所有同學原始分數爲 $x_i, i=1,2\cdots 40$ ，調整後分數爲 $y_i, i=1,2\cdots 40$ ，調整後分數平均數爲 $\overline{Y}$ ，調整後分數的標準差爲 $S_y$ 。原始分數的平均數爲 $\overline{X}=62$ ，標準差爲 $S_x=3$，經過調整後的 $x$ 與 $y$ 的關係爲 $y=\frac{1}{2}x+50$ 。因此

$$\overline{Y}=\frac{1}{2}\overline{X}+50=\frac{1}{2}\times 62+50=81, S_y=\frac{1}{2}S_x=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}\,.$$

故新成績的變異係數 $=\dfrac{\frac{3}{2}}{81}\times 100\%=\dfrac{3}{162}\times 100\%\fallingdotseq 1.85\%$ 。

Apollonius 問題—

# 兼談三條件決定圓(二)

趙文敏／台灣師大數學系

**＊＊訂正**

在「Apollonius 問題—兼談三條件決定圓(一)」一文的思考問題 14 與 16 中，都漏寫了一個條件：「**但點 $A$ 不在圓心 $O$ 至直線 $l$ 的垂直線上**」。事實上，若點 $A$ 在圓心 $O$ 至直線 $l$ 的垂直線上，則兩思考問題中所求圓的總數就有不同的結論。關於這一點，在該文的前言第四段中，已經作了說明。

## 7 線圓圓問題

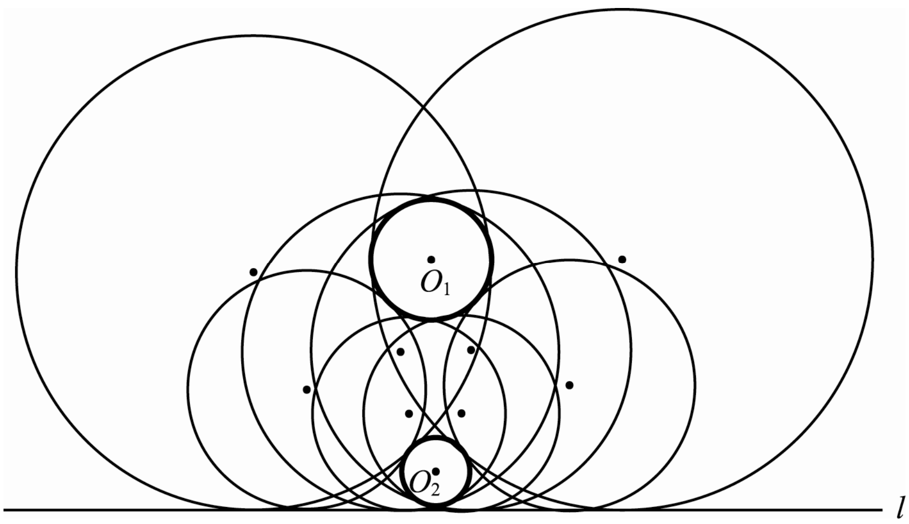
**問題**：給定一直線 $l$ 及兩相異圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，試作出與直線 $l$、圓 $O_1(r_1)$、圓 $O_2(r_2)$ 都相切的圓。

**解**：根據給定直線與給定圓的相對位置，我們考慮下面七種情形：

一、圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 與直線 $l$ 都不相交且位於直線 $l$ 的同側，又圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 外離且圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 的內公切線、外公切線都與直線 $l$ 不平行；設 $r_1 > r_2$。

**《作圖法》**

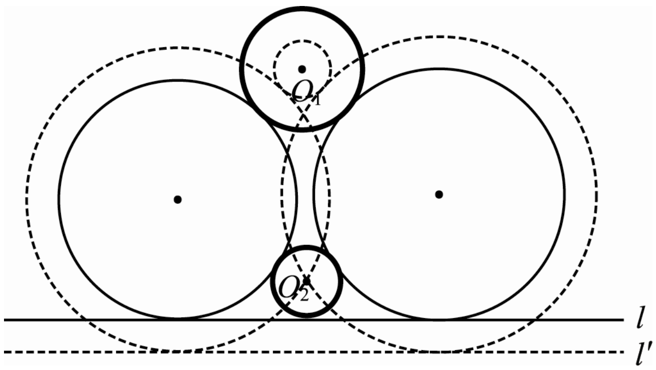
在此情形中，所求圓共有八解（如圖 22 所示），其中
兩圓與圓 $O_1(r_1)$、圓 $O_2(r_2)$ 都外切，兩圓與圓 $O_1(r_1)$、圓 $O_2(r_2)$ 都內切，
兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切，兩圓與圓 $O_1(r_1)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切。




▲圖 22

＊ 第一組：與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都外切的圓

1. 作一直線 $l'$ 與直線 $l$ 平行，使得：
   直線 $l'$ 與直線 $l$ 的距離等於 $r_2$ ，而且直線 $l'$ 與圓心 $O_2$ 位於直線 $l$ 的異側。
2. 作一圓 $O_1(r_1-r_2)$（即圖 23 中以虛線繪出的小圓）。
3. 仿照「點線圓」問題的作圖法，作出過點 $O_2$ 且與直線 $l'$ 相切、與圓 $O_1(r_1-r_2)$ 外切的圓，共兩解（即圖 23 中以虛線繪出的圓）。
4. 以上述兩圓的圓心為圓心，作出與直線 $l$ 相切的圓。此兩圓就是與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都外切的圓（即圖 23 中以實線繪出的圓）。




▲圖 23

《證明》

設一圓 $X$ 與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都外切，則得

$$\overline{XO_1}=(\text{點 } X \text{ 至直線 } l \text{ 的距離})+r_1 \text{，}$$
$$\overline{XO_2}=(\text{點 } X \text{ 至直線 } l \text{ 的距離})+r_2 \text{。}$$

因為直線 $l'$ 與直線 $l$ 平行，直線 $l'$ 與直線 $l$ 的距離等於 $r_2$，而且直線 $l'$ 與圓心 $O_2$ 位於直線 $l$ 的異側，所以，由上述兩式可得

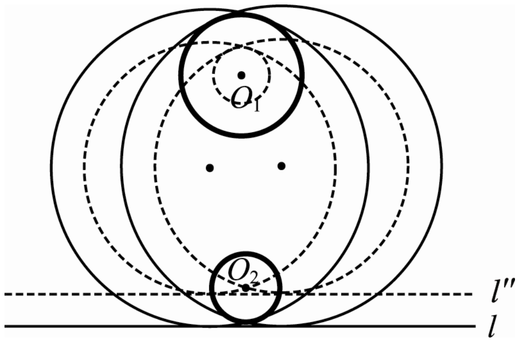
$$\overline{XO_1}-\overline{XO_2}=r_1-r_2 \text{，}$$
$$\overline{XO_2}=(\text{點 } X \text{ 至直線 } l' \text{ 的距離})\text{。}$$

由此可知：圓心 $X$ 是雙曲線 $H(O_1，O_2；r_1-r_2)$ 較靠近焦點 $O_2$ 的一支與拋物線 $P(O_2；l')$ 的一交點。另一方面，由上述兩式可知：圓心 $X$ 也是通過點 $O_2$ 且與直線 $l'$ 相切、與圓 $O_1(r_1-r_2)$ 外切之圓的圓心。因為圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 的外公切線都與直線 $l$ 不平行，所以，點 $O_2$ 至圓 $O_1(r_1-r_2)$ 的切線都與直線 $l'$ 不平行。根據第六小節「點線圓」問題第一種情形第一組圓的作圖，可知過點 $O_2$ 且與直線 $l'$ 相切、與圓 $O_1(r_1-r_2)$ 外切的圓共有兩解。

因為圖 23 中以虛線繪出的兩圓都過點 $O_2$ 且與圓 $O_1(r_1-r_2)$ 外切、與直線 $l'$ 相切，而以實線繪出的兩圓是由虛線圓將半徑縮短 $r_2$ 而得，所以，以實線繪出的圓與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都外切。

＊ 第二組：與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都內切的圓

1. 作一直線 $l''$ 與直線 $l$ 平行，使得：
   直線 $l''$ 與直線 $l$ 的距離等於 $r_2$ ，而且直線 $l''$ 與圓心 $O_2$ 位於直線 $l$ 的同側。
2. 作一圓 $O_1(r_1-r_2)$（即圖 24 中以虛線繪出的小圓）。
3. 仿照「點線圓」問題的作圖法，作出過點 $O_2$ 且與直線 $l''$ 相切、與圓 $O_1(r_1-r_2)$ 內切的圓，共兩解（即圖 24 中以虛線繪出的圓）。
4. 以上述兩圓的圓心爲圓心，作出與直線 $l$ 相切的圓。此兩圓就是與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都內切的圓（即圖 24 中以實線繪出的圓）。




▲圖 24

《證明》

設一圓 $X$ 與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都內切。因爲直線 $l$ 與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 不相交，而且圓 $X$ 與直線 $l$ 相切，又與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都內切，所以，圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 都被包在圓 $X$ 的內部（切點除外）。於是，得

$$\overline{XO_1}=(\text{點 } X \text{ 至直線 } l \text{ 的距離})-r_1，$$
$$\overline{XO_2}=(\text{點 } X \text{ 至直線 } l \text{ 的距離})-r_2 。$$

因爲直線 $l''$ 與直線 $l$ 平行，直線 $l''$ 與直線 $l$ 的距離等於 $r_2$ ，而且直線 $l''$ 與圓心 $O_2$ 位於直線 $l$ 的同側，所以，由上述兩式可得

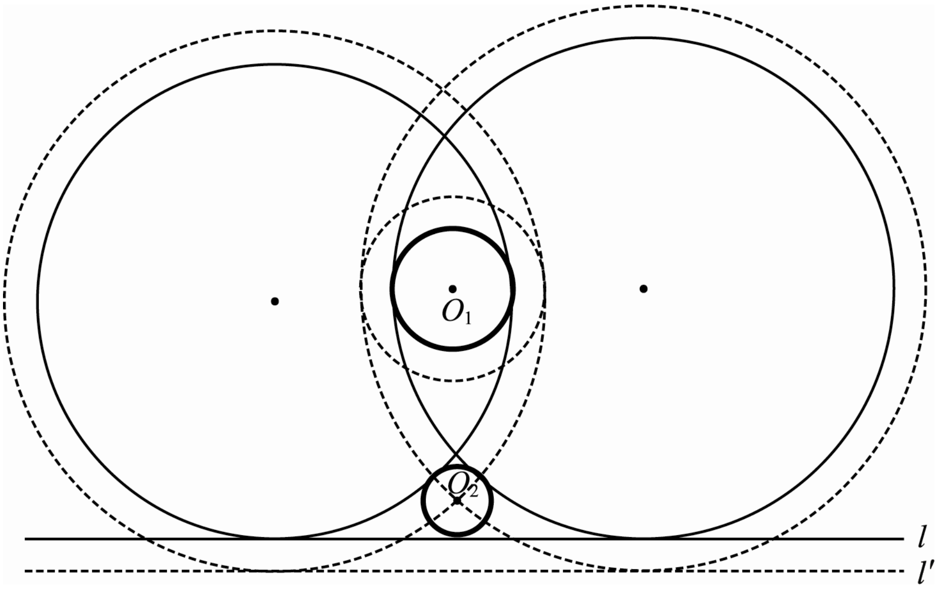
$$\overline{XO_1}-\overline{XO_2}=-(r_1-r_2)，$$
$$\overline{XO_2}=(\text{點 } X \text{ 至直線 } l'' \text{ 的距離})。$$

由此可知：圓心 $X$ 是雙曲線 $H(O_1，O_2；r_1-r_2)$ 較靠近焦點 $O_1$ 的一支與拋物線 $P(O_2；l'')$ 的一交點。另一方面，由上述兩式可知：圓心 $X$ 也是通過點 $O_2$ 且與直線 $l''$ 相切、與圓 $O_1(r_1-r_2)$ 內切之圓的圓心。因爲圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 的外公切線都與直線 $l$ 不平行，所以，點 $O_2$ 至圓 $O_1(r_1-r_2)$ 的切線都與直線 $l''$ 不平行。根據第六小節「點線圓」問題第一種情形第二組圓的作圖，可知過點 $O_2$ 且與直線 $l''$ 相切、與圓 $O_1(r_1-r_2)$ 內切的圓共有兩解。

因爲圖 24 中以虛線繪出的兩圓都過點 $O_2$ 且與圓 $O_1(r_1-r_2)$ 內切、與直線 $l''$ 相切，而以實線繪出的兩圓是由虛線圓將半徑加長 $r_2$ 而得，所以，以實線繪出的圓與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都內切。

＊ 第三組：與圓$O_1(r_1)$內切、與圓$O_2(r_2)$外切的圓

1. 作一直線$l'$與直線 $l$ 平行，使得：
   直線$l'$與直線 $l$ 的距離等於$r_2$，而且直線$l'$與圓心$O_2$位於直線 $l$ 的異側。
2. 作一圓$O_1(r_1+r_2)$（即圖 25 中以虛線繪出的小圓）。
3. 仿照「點線圓」問題的作圖法，作出過點$O_2$且與直線$l'$相切、與圓$O_1(r_1+r_2)$內切的圓，共兩解（即圖 25 中以虛線繪出的圓）。
4. 以上述兩圓的圓心為圓心，作出與直線 $l$ 相切的圓。此兩圓就是與直線 $l$ 相切且與圓$O_1(r_1)$內切、與圓$O_2(r_2)$外切的圓（即圖 25 中以實線繪出的圓）。




▲圖 25

《證明》

設一圓$X$與直線 $l$ 相切且與圓$O_1(r_1)$內切、與圓$O_2(r_2)$外切。因為直線 $l$ 與圓$O_1(r_1)$不相交，而且圓$X$與直線 $l$ 相切，又與圓$O_1(r_1)$內切，所以，圓$O_1(r_1)$被包在圓$X$的內部（切點除外）。於是，得

$$\overline{XO_1}=(\text{點 }X\text{ 至直線 }l\text{ 的距離})-r_1，$$

$$\overline{XO_2}=(\text{點 }X\text{ 至直線 }l\text{ 的距離})+r_2。$$

因為直線$l'$與直線 $l$ 平行，直線$l'$與直線 $l$ 的距離等於$r_2$，而且直線$l'$與圓心$O_2$位於直線 $l$ 的異側，所以，由上述兩式可得

$$\overline{XO_1}-\overline{XO_2}=-(r_1+r_2)，$$

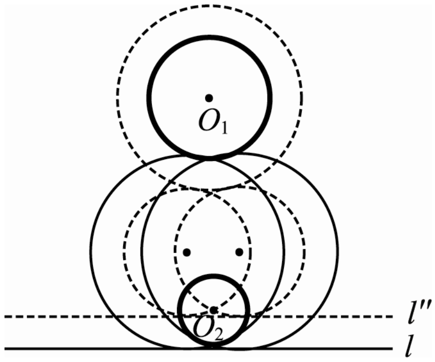
$$\overline{XO_2}=(\text{點 }X\text{ 至直線 }l'\text{ 的距離})。$$

由此可知：圓心$X$是雙曲線$H(O_1，O_2；r_1+r_2)$較靠近焦點$O_1$的一支與拋物線$P(O_2；l')$的一交點。另一方面，由上述兩式可知：圓心$X$也是通過點$O_2$且與直線$l'$相切、與圓$O_1(r_1+r_2)$內切之圓的圓心。因為圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$的內公切線都與直線 $l$ 不平行，所以，點$O_2$至圓$O_1(r_1+r_2)$的切線都與直線$l'$不平行。根據第六小節「點線圓」問題第一種情形第二組的作圖，可知過點$O_2$且與直線$l'$相切、與圓$O_1(r_1+r_2)$內切的圓共有兩解。

因爲圖 25 中以虛線繪出的兩圓都過點 $O_2$ 且與圓 $O_1(r_1+r_2)$ 內切、與直線 $l'$ 相切，而以實線繪出的兩圓是由虛線圓將半徑縮短 $r_2$ 而得，所以，以實線繪出的圓與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 內切、與圓 $O_2(r_2)$ 外切。

＊ 第四組：與圓 $O_1(r_1)$ 外切、與圓 $O_2(r_2)$ 內切的圓

1. 作一直線 $l''$ 與直線 $l$ 平行，使得：
   直線 $l''$ 與直線 $l$ 的距離等於 $r_2$，而且直線 $l''$ 與圓心 $O_2$ 位於直線 $l$ 的同側。
2. 作一圓 $O_1(r_1+r_2)$（即圖 26 中以虛線繪出的大圓）。
3. 仿照「點線圓」問題的作圖法，作出過點 $O_2$ 且與直線 $l''$ 相切、與圓 $O_1(r_1+r_2)$ 外切的圓，共兩解（即圖 26 中以虛線繪出的小圓）。
4. 以上述兩圓的圓心爲圓心，作出與直線 $l$ 相切的圓。此兩圓就是與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 外切、與圓 $O_2(r_2)$ 內切的圓（即圖 26 中以實線繪出的圓）。




▲圖 26

《證明》

設一圓 $X$ 與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 外切、與圓 $O_2(r_2)$ 內切。因爲直線 $l$ 與圓 $O_2(r_2)$ 不相交，而且圓 $X$ 與直線 $l$ 相切，又與圓 $O_2(r_2)$ 內切，所以，圓 $O_2(r_2)$ 被包在圓 $X$ 的內部（切點除外）。於是，得

$$\overline{XO_1}=(\text{點 } X \text{ 至直線 } l \text{ 的距離})+r_1，$$
$$\overline{XO_2}=(\text{點 } X \text{ 至直線 } l \text{ 的距離})-r_2。$$

因爲直線 $l''$ 與直線 $l$ 平行，直線 $l''$ 與直線 $l$ 的距離等於 $r_2$，而且直線 $l''$ 與圓心 $O_2$ 位於直線 $l$ 的同側，所以，由上述兩式可得

$$\overline{XO_1}-\overline{XO_2}=r_1+r_2，$$
$$\overline{XO_2}=(\text{點 } X \text{ 至直線 } l'' \text{ 的距離})。$$

由此可知：圓心 $X$ 是雙曲線 $H(O_1，O_2；r_1+r_2)$ 較靠近焦點 $O_2$ 的一支與抛物線 $P(O_2；l'')$ 的一交點。另一方面，由上述兩式可知：圓心 $X$ 也是通過點 $O_2$ 且與直線 $l''$ 相切、與圓 $O_1(r_1+r_2)$ 外切之圓的圓心。因爲圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 的內公切線都與直線 $l$ 不平行，所以，點 $O_2$ 至圓 $O_1(r_1+r_2)$ 的切線都與直線 $l''$ 不平行。根據第六小節「點線圓」問題第一種情形第一組的作圖，可知過點 $O_2$ 且與直線 $l''$ 相切、與圓 $O_1(r_1+r_2)$ 外切的圓共有兩解。

因爲圖 26 中以虛線繪出的兩小圓都過點 $O_2$ 且與圓 $O_1(r_1+r_2)$ 外切、與直線 $l''$ 相切，而以實線繪出的兩圓是由虛線圓將半徑加長 $r_2$ 而得，所以，以實線繪出的

圓與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 外切、與圓 $O_2(r_2)$ 內切。

二、圓 $O_1(r)$, $O_2(r)$ 與直線 $l$ 都不相交且位於直線 $l$ 的同側，又圓 $O_1(r)$, $O_2(r)$ 外離且圓 $O_1(r)$, $O_2(r)$ 的內公切線、外公切線都與直線 $l$ 不平行。

**思考問題 17：**

試證：在「線圓圓」問題的第二種情形中，與直線 $l$、圓 $O_1(r)$ 、圓 $O_2(r)$ 都相切的圓仍有八解。但其中與圓 $O_1(r)$, $O_2(r)$ 都外切的兩圓（第一組圓）或都內切的兩圓（第二組圓）須引用「點點線」的作圖法來作出圓心，亦即：第一組圓的圓心就是過點 $O_1$, $O_2$ 且與直線 $l'$ 相切之圓的圓心；第二組圓的圓心就是過點 $O_1$, $O_2$ 且與直線 $l''$ 相切之圓的圓心。至於第三組圓與第四組圓的作圖法，則與第一種情形的同一組圓作圖法相同（只須將圓 $O_1(r_1+r_2)$ 改用圓 $O_1(2r)$ 即可）。

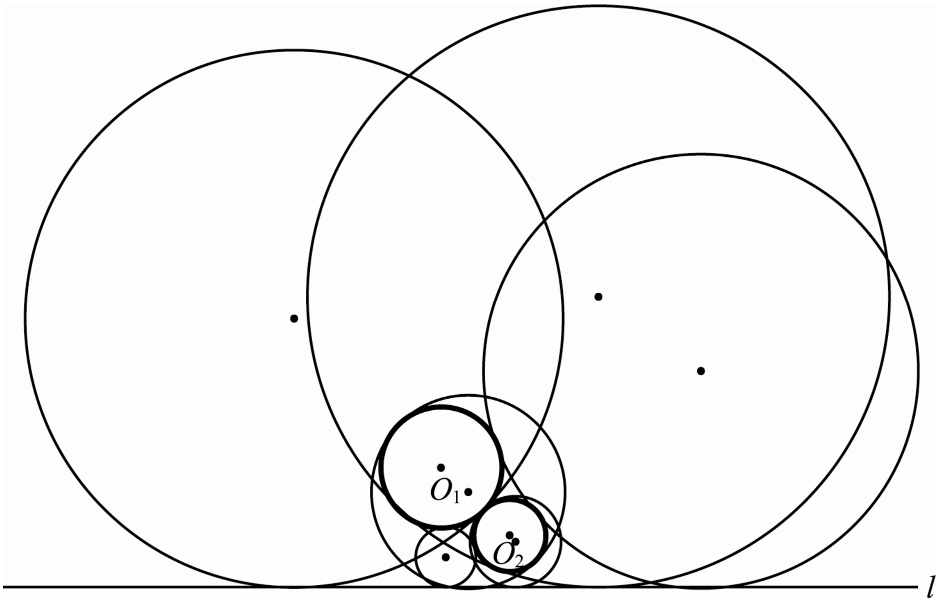
三、圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 與直線 $l$ 都不相交且位於直線 $l$ 的同側，又圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 外切且圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 的內公切線、外公切線都與直線 $l$ 不平行；設 $r_1 > r_2$。

《作圖法》

在此情形中，所求圓共有六解（如圖 27 所示），其中

兩圓與圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 都外切，兩圓與圓 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ 都內切，

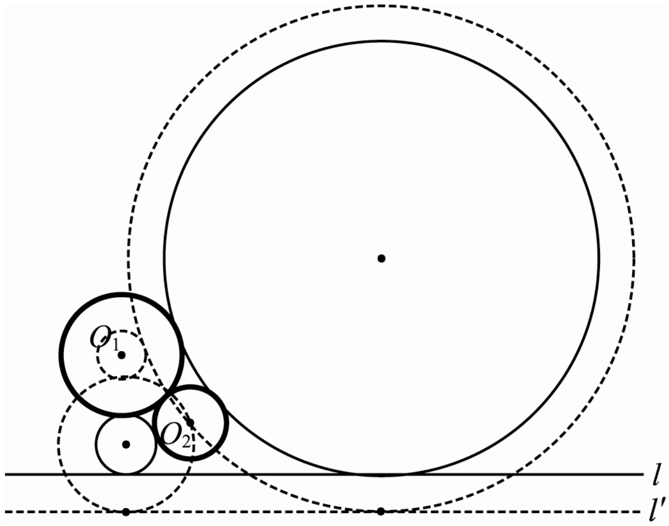
一圓與圓 $O_1(r_1)$ 內切而與 $O_2(r_2)$ 外切，一圓與圓 $O_1(r_1)$ 外切而與 $O_2(r_2)$ 內切。




▲ 圖 27

＊ 第一組：與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都外切的圓

與第一種情形第一組圓的作圖法相同，共兩解。（如圖 28 所示）



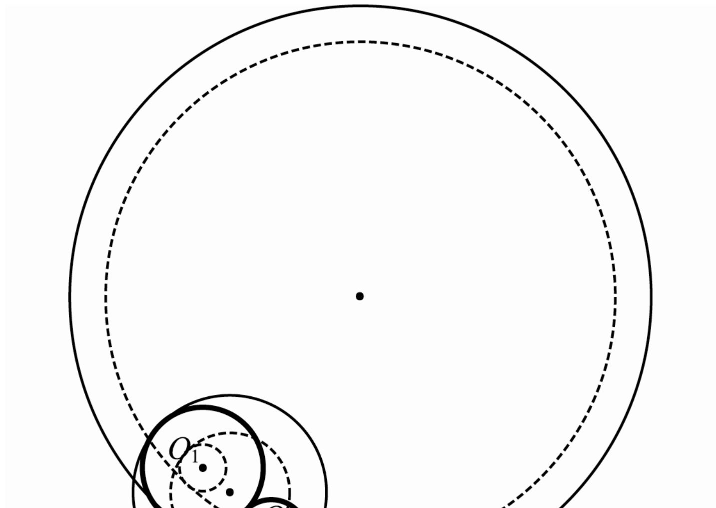

▲圖 28

《證明》

與第一種情形第一組圓的證明相同。

＊ 第二組：與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都內切的圓

與第一種情形第二組圓的作圖法相同，共兩解。（如圖 29 所示）




▲圖 29

《證明》

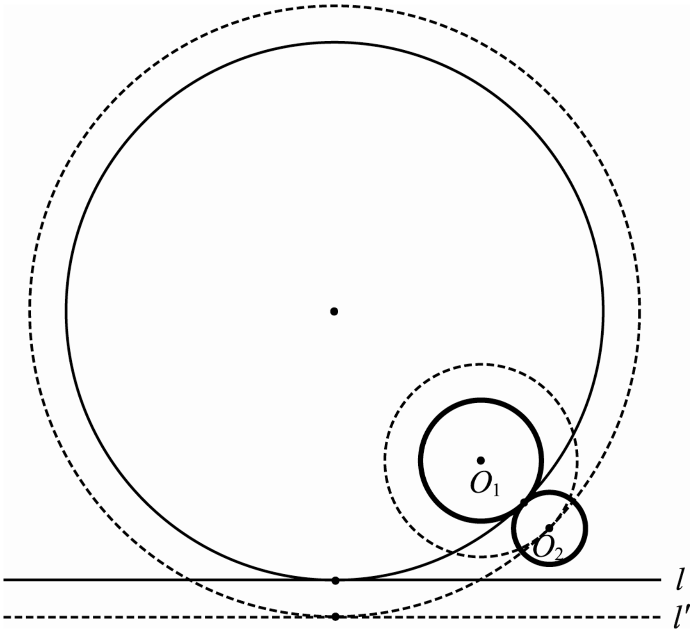
與第一種情形第二組圓的證明相同。

＊ 第三組：與圓 $O_1(r_1)$ 內切、與圓 $O_2(r_2)$ 外切的圓

1. 作一直線 $l'$ 與直線 $l$ 平行，使得：

   直線 $l'$ 與直線 $l$ 的距離等於 $r_2$ ，而且直線 $l'$ 與圓心 $O_2$ 位於直線 $l$ 的異側。

2. 作一圓 $O_1(r_1+r_2)$（即圖 30 中以虛線繪出的小圓）。
3. 仿照「點線圓」問題的作圖法，作出過點 $O_2$ 且與直線 $l'$ 相切、與圓 $O_1(r_1+r_2)$ 內切的圓。因爲點 $O_2$ 在圓 $O_1(r_1+r_2)$ 上，所以，此種圓只有一解。
4. 以上述圓的圓心爲圓心，作出與直線 $l$ 相切的圓。此圓就是與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 內切、與圓 $O_2(r_2)$ 外切的圓。




▲圖 30

《證明》

設一圓 $X$ 與直線 $l$ 相切且與圓 $O_1(r_1)$ 內切、與圓 $O_2(r_2)$ 外切。根據第一種情形第三組圓作圖法的證明，可得

$$\overline{XO_2}-\overline{XO_1}=r_1+r_2\text{ ，}$$

$$\overline{XO_2}=(\text{點 } X \text{ 至直線 } l' \text{ 的距離})\text{。}$$

由上述兩式可知：圓心 $X$ 也是通過點 $O_2$ 且與直線 $l'$ 相切、與圓 $O_1(r_1+r_2)$ 內切之圓的圓心。另一方面，因爲圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 外切，所以，$\overline{O_1O_2}=r_1+r_2$，亦即：點 $O_2$ 在圓 $O_1(r_1+r_2)$ 上。與上述前一式比較，可得 $\overline{XO_2}-\overline{XO_1}=\overline{O_1O_2}$。由此可知：圓心 $X$ 是射線 $\overrightarrow{O_1O_2}$ 的相反射線與拋物線 $P(O_2;l')$ 的一交點。

因爲圓 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ 的內公切線與直線 $l$ 不平行，所以，直線 $O_1O_2$ 與直線 $l'$ 不垂直，亦即：點 $O_2$ 不在圓心 $O_1$ 至直線 $l'$ 的垂直線上。

因爲直線 $l'$ 與圓 $O_1(r_1+r_2)$ 不相交，點 $O_2$ 在圓 $O_1(r_1+r_2)$ 上，而且點 $O_2$ 不在圓 $O_1(r_1+r_2)$ 的圓心 $O_1$ 至直線 $l'$ 的垂直線上，所以，根據第六小節「點線圓」問題第三種情形第二組的作圖，可知過點 $O_2$ 且與直線 $l'$ 相切、與圓 $O_1(r_1+r_2)$ 內切的圓只有一解。

因爲圖 30 中以虛線繪出的圓過點 $O_2$ 且與圓 $O_1(r_1+r_2)$ 內切、與直線 $l'$ 相切，而以實線繪出的圓是由虛線圓將半徑縮短 $r_2$ 而得，所以，以實線繪出的圓與直線 $l$ 相切且圓 $O_1(r_1)$ 內切、與圓 $O_2(r_2)$ 外切。

∗ 第四組：與圓$O_1(r_1)$外切、與圓$O_2(r_2)$內切的圓

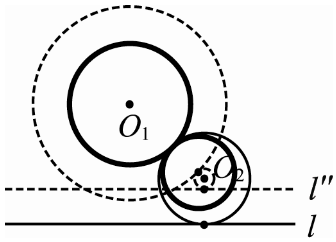
1. 作一直線$l''$與直線$l$平行，使得：

   直線$l''$與直線$l$的距離等於$r_2$，而且直線$l''$與圓心$O_2$位於直線$l$的同側。

2. 作一圓$O_1(r_1+r_2)$（即圖 31 中以虛線繪出的大圓）。

3. 仿照「點線圓」問題的作圖法，作出過點$O_2$且與直線$l''$相切、與圓$O_1(r_1+r_2)$外切的圓。因為點$O_2$在圓$O_1(r_1+r_2)$上，所以，此種圓只有一解。

4. 以上述圓的圓心為圓心，作出與直線$l$相切的圓。此圓就是與直線$l$相切且與圓$O_1(r_1)$外切、與圓$O_2(r_2)$內切的圓。




▲圖 31

《證明》

設一圓$X$與直線$l$相切且與圓$O_1(r_1)$外切、與圓$O_2(r_2)$內切。根據第一種情形第四組圓作圖法的證明，可得

$$\overline{XO_1}-\overline{XO_2}=r_1+r_2\text{ ，}$$

$$\overline{XO_2}=(\text{點 }X\text{ 至直線 }l''\text{ 的距離})\text{。}$$

由上述兩式可知：圓心$X$也是通過點$O_2$且與直線$l''$相切、與圓$O_1(r_1+r_2)$外切之圓的圓心。另一方面，因為圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$外切，所以，$\overline{O_1O_2}=r_1+r_2$，亦即：點$O_2$在圓$O_1(r_1+r_2)$上。與上述前一式比較，可得$\overline{XO_1}-\overline{XO_2}=\overline{O_1O_2}$。由此可知：圓心$X$是射線$\overrightarrow{O_2O_1}$的相反射線與拋物線$P(O_2；l'')$的一交點。

因為圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$的內公切線與直線$l$不平行，所以，直線$O_1O_2$與直線$l''$不垂直，亦即：點$O_2$不在圓心$O_1$至直線$l''$的垂直線上，或是說，直線$O_1O_2$不是拋物線$P(O_2；l'')$的軸。因為射線$\overrightarrow{O_2O_1}$的相反射線不在拋物線$P(O_2；l'')$的軸上，而且其端點是拋物線$P(O_2；l'')$的焦點，所以，射線$\overrightarrow{O_2O_1}$的相反射線與拋物線$P(O_2；l'')$恰有一個交點。因此，與直線$l$相切且與圓$O_1(r_1)$外切、與圓$O_2(r_2)$內切的圓恰有一解。

在圖 31 中以實線繪出的圓，是由過點$O_2$且與圓$O_1(r_1+r_2)$外切、與直線$l''$相切的圓將半徑增長$r_2$而得，所以，以實線繪出的圓與直線$l$相切且與圓$O_1(r_1)$外切、與圓$O_2(r_2)$內切。

附註：

設圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$的內公切線為直線$l*$，作直線$l$與直線$l*$的四夾角的兩分角線，則兩分角線與直線$O_1O_2$的兩交點分別為第三組與第四組圓的圓心。

四、圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$與直線$l$都不相交且位於直線$l$的同側，又圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$相交於兩相異點且圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$的外公切線都與直線 $l$ 不平行；設$r_1 > r_2$。

**思考問題 18：**

試證：在「線圓圓」問題的第四種情形中，與直線 $l$、圓$O_1(r_1)$、圓$O_2(r_2)$都相切的圓只有四解。其中，第一組圓與第二組圓的作圖法與解的數量，都與第一種情形的同一組圓作圖法與解的數量相同。至於與圓$O_1(r_1)$內切而與圓$O_2(r_2)$外切的圓（第三組圓）以及與圓$O_1(r_1)$外切而與圓$O_2(r_2)$內切的圓（第四組圓）都不存在，理由就在於圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$相交於兩相異點。

五、圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$與直線$l$都不相交且位於直線$l$的同側，又圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$內切且圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$的外公切線與直線 $l$ 不平行；設$r_1 > r_2$。

**思考問題 19：**

試證：在「線圓圓」問題的第五種情形中，與直線 $l$、圓$O_1(r_1)$、圓$O_2(r_2)$都相切的圓只有二解。其中，與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$都外切的圓（第一組圓）以及與圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$都內切的圓（第二組圓）的作圖法，也都與第一種情形的同一組圓作圖法相同，但解的數量卻都只有一解，理由就在於圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$內切。至於與圓$O_1(r_1)$內切而與圓$O_2(r_2)$外切的圓（第三組圓）以及與圓$O_1(r_1)$外切而與圓$O_2(r_2)$內切的圓（第四組圓）都不存在，理由就在於圓$O_2(r_2)$被包在圓$O_1(r_1)$的內部（切點除外）而圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$與直線 $l$ 都不相交。

六、圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$與直線$l$都不相交且位於直線$l$的同側，又圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$內離；設$r_1 > r_2$。

**思考問題 20：**

試證：在「線圓圓」問題的第六種情形中，與直線 $l$、圓$O_1(r_1)$、圓$O_2(r_2)$都相切的圓不存在，理由就在於圓$O_2(r_2)$被包在圓$O_1(r_1)$的內部而圓$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$與直線 $l$ 都不相交。

七、圓$O_1(r_1)$與直線 $l$ 不相交，但圓$O_2(r_2)$與直線 $l$ 相交於兩相異點，又圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$外離且圓$O_1(r_1)$與圓$O_2(r_2)$的內公切線、外公切線都與直線 $l$ 不平行；設$r_1 > r_2$。

**思考問題 21：**

試證：在「線圓圓」問題的第七種情形中，與直線 $l$、圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都相切的圓只有四解。其中，與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都外切的圓（第一組圓）以及與圓 $O_1(r_1)$ 內切而與圓 $O_2(r_2)$ 外切的圓（第三組圓）的作圖法與解的數量，都與第一種情形的同一組圓作圖法與解的數量相同。至於圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 都內切的圓（第二組圓）以及與圓 $O_1(r_1)$ 外切而與圓 $O_2(r_2)$ 內切的圓（第四組圓）都不存在，理由就在於圓 $O_2(r_2)$ 與直線 $l$ 相交於兩相異點而圓 $O_1(r_1)$ 與圓 $O_2(r_2)$ 外離。

在「線圓圓」問題中，另一些值得討論的情形是直線 $l$ 與圓 $O_1(r_1)$ 、圓 $O_2(r_2)$ 之一或兩個相切或相交於兩相異點。

## ⑧ 點點圓問題

**問題**：給定一圓 $O$ 及兩相異點 $A$、$B$，試作出過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓。

**解**：根據給定點與給定圓的相對位置，我們共分成十一種情形：

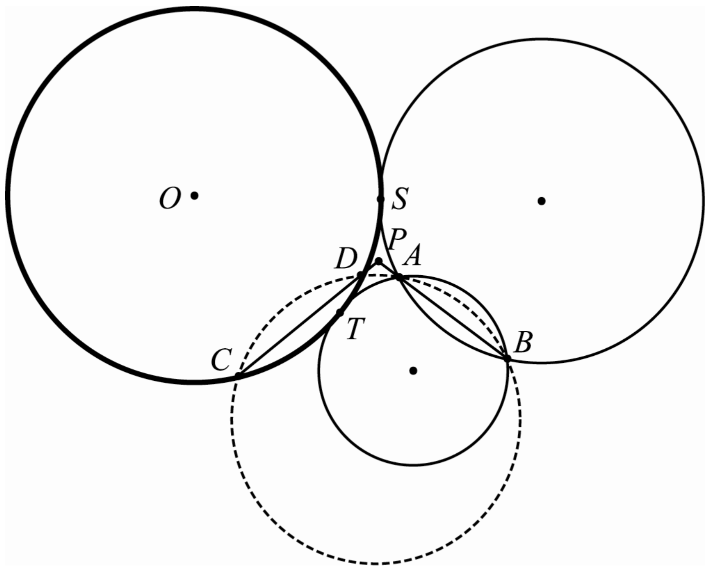
一、點 $A$ 與點 $B$ 都在圓 $O$ 的外部，$\overline{AB}$ 的垂直平分線不過圓心 $O$，直線 $AB$ 與圓 $O$ 不相切。

《作圖法》

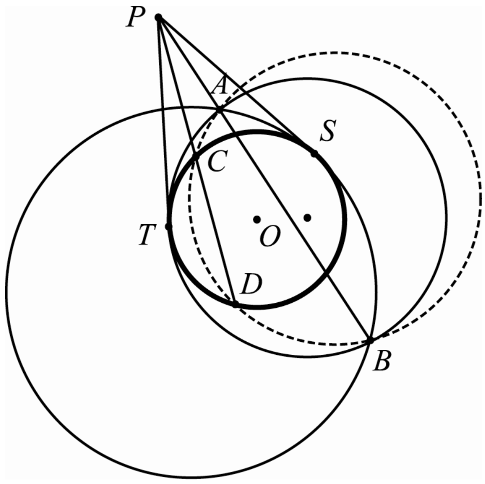
在此情形中，所求圓共有二解，

可能兩圓都與圓 $O$ 外切(如圖 32 所示)，可能兩圓都與圓 $O$ 內切(如圖 33 所示)，也可能其中一圓與圓 $O$ 外切，另一圓與圓 $O$ 內切（如圖 34 所示）。

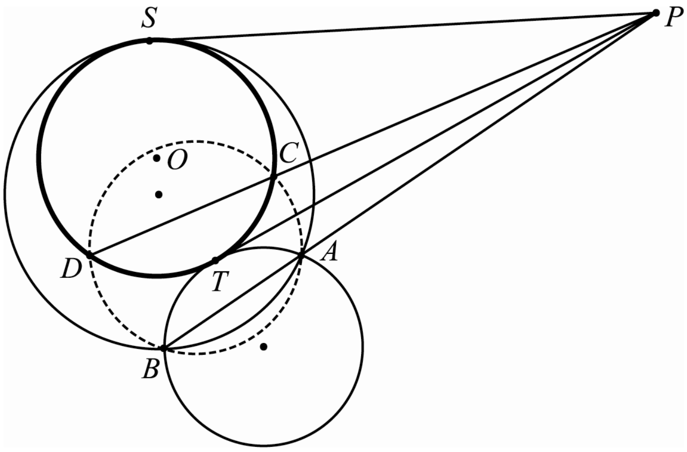
三種狀況作圖過程相同。




▲圖 32



▲圖 33



▲圖 34

1. 因爲 $\overline{AB}$ 的垂直平分線不過圓心 $O$，所以，過點 $A$、$B$ 必有一個圓與圓 $O$ 有二相異交點 $C$、$D$，且直線 $AB$ 與直線 $CD$ 相交於一點 $P$，但點 $P$ 不在 $\overline{AB}$ 上也不在 $\overline{CD}$ 上。（請注意：點 $P$ 恆存在且唯一，參見下面的引理。）
2. 過點 $P$ 作圓 $O$ 的兩切線，設切點分別爲 $S$、$T$。因爲直線 $AB$ 與圓 $O$ 不相切，所以，切點 $S$ 與 $T$ 都不在直線 $AB$ 上。
3. 過點 $A$、$B$、$S$ 的圓與過點 $A$、$B$、$T$ 的圓即爲所求。

《證明》

因爲 $\overline{PAB}$ 與 $\overline{PCD}$ 是圓 $ABCD$ 的兩割線，所以，依圓冪定理，可知

$$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}\text{ 。}$$

因爲 $\overline{PCD}$ 也是圓 $O$ 的割線，所以，點 $P$ 對圓 $O$ 與圓 $ABCD$ 的冪相等。因爲 $\overline{PS}$ 與 $\overline{PT}$ 是圓 $O$ 的切線段，所以，得

$$\overline{PS}^2=\overline{PC}\times\overline{PD}=\overline{PA}\times\overline{PB}\text{ ，}$$

$$\overline{PT}^2=\overline{PC}\times\overline{PD}=\overline{PA}\times\overline{PB}\text{ 。}$$

於是，$\overline{PS}$ 也是圓 $ABS$ 的切線段，$\overline{PT}$ 也是圓 $ABT$ 的切線段，亦即：圓 $ABS$ 與圓 $ABT$ 都與圓 $O$ 相切。

**思考問題 22：**

試證：若點 $A$ 與點 $B$ 都在圓 $O(r)$ 的外部，$\overline{AB}$ 的垂直平分線不過圓心 $O$，直線 $AB$ 與圓 $O(r)$ 不相切，則圓 $X$ 過點 $A$、$B$ 且與圓 $O(r)$ 相切的充要條件是：圓心 $X$ 是雙曲線 $H(A，O；r)$ 與 $\overline{AB}$ 的垂直平分線的一交點。

**引理**：設兩相異點 $A$ 與 $B$ 都在圓 $O$ 的內部或都在圓 $O$ 的外部。若 $\overline{AB}$ 的垂直平分線不過圓心 $O$，則直線 $AB$ 上恰有一點 $P$ 使得 $\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}$ 等於點 $P$ 對圓 $O$ 的冪，而且點 $P$ 在圓 $O$ 的外部。

**證明**：選取一坐標系，使得點 $A$ 與 $B$ 的坐標分別爲 $A(a,0)$ 與 $B(0,0)$，且圓 $O$ 的方程式爲 $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$，並設 $a>0$。

設 $P(t,0)$ 爲直線 $AB$（即 $x$ 軸）上一點，則 $\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}=t(t-a)$，且 $P(t,0)$ 對圓 $O$ 的冪等於 $(t-c)^2+d^2-r^2$。考慮下述方程式：

$$t(t-a)=(t-c)^2+d^2-r^2，$$

$$(2c-a)t=c^2+d^2-r^2。$$

因爲 $\overline{AB}$ 的垂直平分線不過圓心 $O$，所以，$2c-a\neq 0$。於是，得

$$t=\frac{c^2+d^2-r^2}{2c-a}。$$

(1) 若 $A$ 與 $B$ 都在圓 $O$ 的內部，則 $(a-c)^2+d^2-r^2<0$ 且 $c^2+d^2-r^2<0$。

當 $2c-a>0$ 時（即圓心在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線的右側），
即 $t<0$，這表示點 $B$ 介於點 $P(t,0)$ 與點 $A$ 之間。

當 $2c-a<0$ 時（即圓心在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線的左側），得

$$\frac{c^2+d^2-r^2}{2c-a}-a=\frac{a^2-2ac+c^2+d^2-r^2}{2c-a}=\frac{(a-c)^2+d^2-r^2}{2c-a}>0,$$

即 $t>a$，這表示點 $A$ 介於點 $P(t,0)$ 與點 $B$ 之間。

(2) 若 $A$ 與 $B$ 都在圓 $O$ 的外部，則 $(a-c)^2+d^2-r^2>0$ 且 $c^2+d^2-r^2>0$。

當 $2c-a>0$ 時（即圓心在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線的右側），得

$$\frac{c^2+d^2-r^2}{2c-a}-a=\frac{a^2-2ac+c^2+d^2-r^2}{2c-a}=\frac{(a-c)^2+d^2-r^2}{2c-a}>0,$$

即 $t>a$，這表示點 $A$ 介於點 $P(t,0)$ 與點 $B$ 之間。

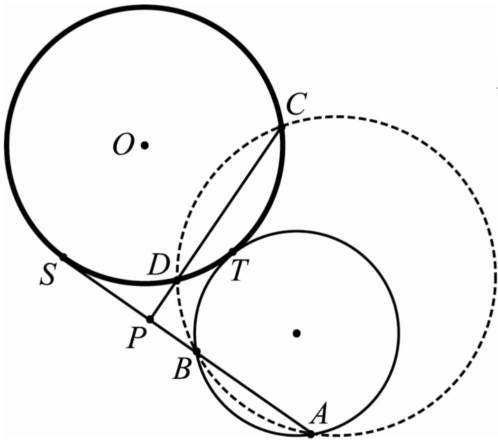
當 $2c-a<0$ 時（即圓心在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線的左側），
即 $t<0$，這表示點 $B$ 介於點 $P(t,0)$ 與點 $A$ 之間。

不論點 $A$ 與 $B$ 都在圓 $O$ 的內部或都在圓 $O$ 的外部，點 $P$ 對圓 $O$ 的冪 $\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}$ 都是正數。因此，點 $P$ 位於圓 $O$ 的外部。

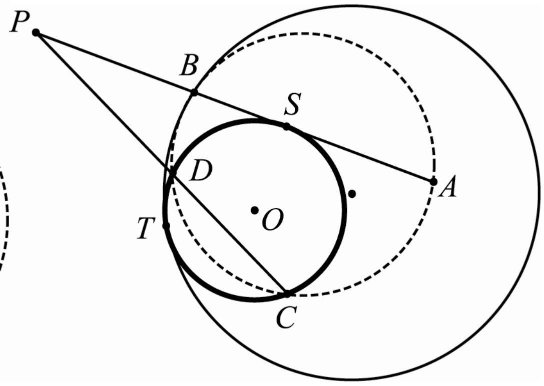
二、點 $A$ 與點 $B$ 都在圓 $O$ 的外部，$\overline{AB}$ 的垂直平分線不過圓心 $O$，直線 $AB$ 與圓 $O$ 相切。

**思考問題 23：**

試證：在「點點圓」問題的第二種情形中，過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓只有一解，而且此圓可能與圓 $O$ 外切（如圖 35 所示），也可能與圓 $O$ 內切（如圖 36 所示）。請注意：在此情形中，圖 32~34 中的點 $S$ 與點 $T$ 有一點在直線 $AB$ 上。



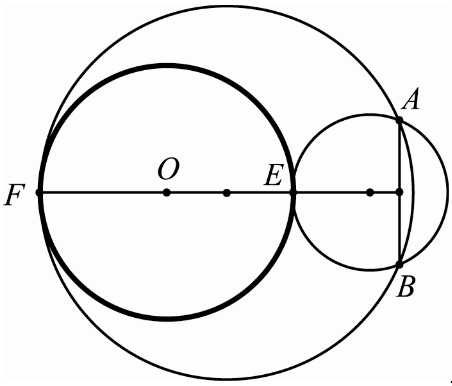

▲圖 35




▲圖 36

三、點 $A$ 與點 $B$ 都在圓 $O$ 的外部，$\overline{AB}$ 的垂直平分線通過圓心 $O$，直線 $AB$ 與圓 $O$ 不相切。

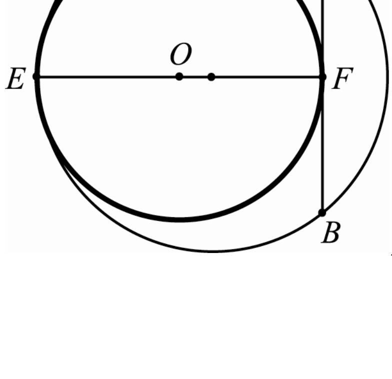
**思考問題 24：**
試證：在「點點圓」問題的第三種情形中，過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓有二解，其中一圓與圓 $O$ 外切，另一圓與圓 $O$ 內切。




▲圖 37

四、點 $A$ 與點 $B$ 都在圓 $O$ 的外部，$\overline{AB}$ 的垂直平分線通過圓心 $O$，直線 $AB$ 與圓 $O$ 相切。

**思考問題 25：**
試證：在「點點圓」問題的第四種情形中，過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓只有一解，此解中的圓與圓 $O$ 內切。

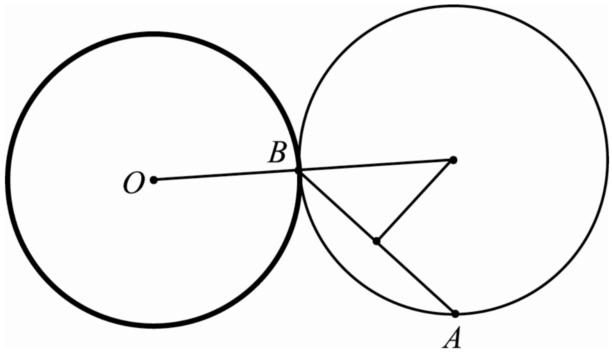



▲圖 38

五、點 $A$ 在圓 $O$ 的外部，點 $B$ 在圓 $O$ 上，直線 $AB$ 與圓 $O$ 不相切。

**思考問題 26：**

試證：在「點點圓」問題的第五種情形中，過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓只有一解。

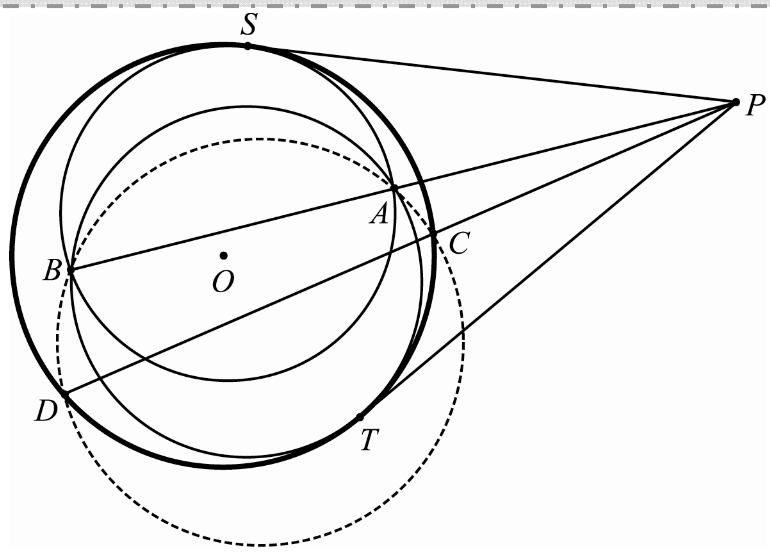



▲圖 39

六、點 $A$ 與點 $B$ 在圓 $O$ 的內部，$\overline{AB}$ 的垂直平分線不過圓心 $O$。

**思考問題 27：**

試證：在「點點圓」問題的第六種情形中，過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓共有二解，兩圓都與圓 $O$ 內切。

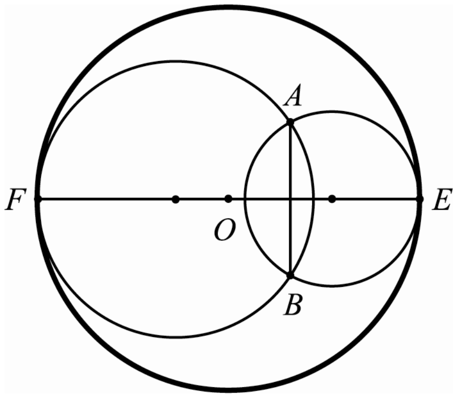



▲圖 40

七、點 $A$ 與點 $B$ 都在圓 $O$ 的內部，$\overline{AB}$ 的垂直平分線通過圓心 $O$。

**思考問題 28：**

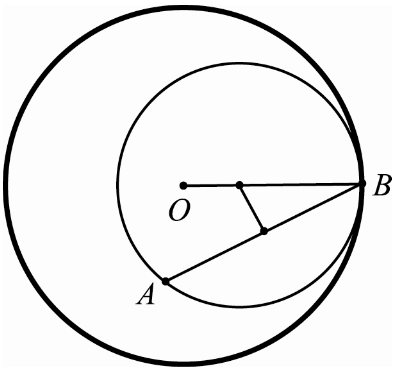
試證：在「點點圓」問題的第七種情形中，過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓共有二解，兩圓都與圓 $O$ 內切。




▲圖 41

八、點 $A$ 在圓 $O$ 的內部，點 $B$ 在圓 $O$ 上。

**思考問題 29：**
試證：在「點點圓」問題的第八種情形中，過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓只有一解，此圓與圓 $O$ 內切。




▲圖 42

九、點 $A$ 在圓 $O$ 的外部，點 $B$ 在圓 $O$ 上，直線 $AB$ 與圓 $O$ 相切於點 $B$。

**思考問題 30：**
試證：在「點點圓」問題的第九種情形中，過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓不存在。

十、點 $A$ 與點 $B$ 都在圓 $O(r)$ 上。

**思考問題 31：**
試證：在「點點圓」問題的第十種情形中，過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓不存在。

十一、點 $A$ 在圓 $O$ 的內部，點 $B$ 在圓 $O$ 的外部。

**思考問題 32：**
試證：在「點點圓」問題的第十一種情形中，過點 $A$、$B$ 且與圓 $O$ 相切的圓不存在。

# 專欄 動手玩數學

許志農／台灣師範大學數學系


遊戲 49

☆☆

要計算西元$Y$年$M$月$D$日為星期幾可以用以下公式，使用公式前先要將年份與月份做調整，基本上，以下的公式推導是將每年的三月一日當成一年的開始，如此一來，原來的三月就要當成第一月，四月被當成第二月，其他則依此類推，而原有的一月、二月就被當成第十一、十二月。此外年份也要加以改變，推算的日期若在三月之前，則年份須減一，例如：公元$2000-1-1$的$Y=1999, M=11, D=1$；而公元$1999-12-31$的$Y=1999, M=10, D=31$：

$$\left(Y+\left[\frac{Y}{4}\right]-\left[\frac{Y}{100}\right]+\left[\frac{Y}{400}\right]+\left[2.6\times M-0.2\right]+D\right) \pmod 7$$

公式中的$[x]$為$x$的整數部分，而$x$（mod 7）是指$x$除以7的餘數，當餘數為0時，代表星期天，餘數為1時，則為星期一，其他依此類推。

牛頓出生於1643年的1月4日，請利用此公式計算牛頓出生那天是星期幾？

〔玩鎖・玩索〕

此題改編自九十二學年度中央大學數學系甄試入學的試題，「計算牛頓生日是星期幾」是改編的。不是聽說牛頓生日剛好是聖誕節嗎？這種說法不太正確，歐洲在當時有兩種不同曆法，在英國和西歐的部分地區使用儒略曆，其他地方則使用格里曆。牛頓出生於儒略曆1642年的聖誕節，換算成格里曆是1643年的1月4日。


＊註＊

上圖是1月4日Google搜尋引擎上的慶賀圖形，有蘋果掉下來，藉此幫牛頓慶生。

＊註＊

Google（2010），Google搜尋引擎上的慶賀牛頓生日圖形。2010年1月4日，取自 http://www.google.com.tw/。

遊戲 50

☆☆☆☆☆

緯度是指某點與地球球心連線和地球赤道面所形成的夾角，其數值在 $0°$ 至 $90°$ 之間，位於赤道以北稱北緯，位於赤道以南稱南緯。設某一地球儀南北極的點坐標分別爲：南極 $(-1,2,1)$ 及北極 $(3,-2,5)$。

(1) 求包含該地球儀南緯 $30°$ 線的平面方程式。

(2) 點 $P(2+\frac{\sqrt{6}}{2},-1+\sqrt{6},4+\frac{\sqrt{6}}{2})$ 是位在哪條緯度線上？（請回答南緯或北緯多少度）

〔玩鎖・玩索〕

這是成功大學九十九學年度數學系申請入學基礎數學試題中的一道題目。題目範圍爲空間中的球面方程式與平面方程式，是一道有趣的問題。我們生存的地球是一顆半徑很大（約6400公里）的球體。站在地面上，放眼望去感覺地是平的，那是因爲半徑太大的緣故；若我們有幸從月球上眺望地球，就可以清楚的看到地球像一顆球體了。

遊戲 51

☆☆☆☆

某試場共有六個座位，座位安排如下圖所示：


本試場有甲、乙、丙、丁、戊、己六名考生，在考試前抽籤安排座位入場應考。試前，甲、乙兩考生約定當兩人座位左右相鄰時，乙考生會故意亮答案給甲考生看；而甲、丙兩考生約定當丙座位在甲座位前面時，丙考生會故意亮答案給甲考生看。

(1) 甲看到乙答案的機率爲何？

(2) 甲看到丙答案的機率爲何？

(3) 甲看到乙，也看到丙答案的機率爲何？

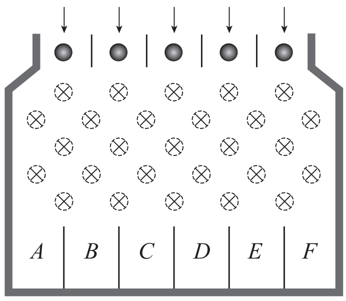
〔玩鎖・玩索〕

本問題改編自交通大學數學系推甄試題。古典機率的定義就是將事件的樣本數除以母群體的樣本數，而樣本數的計算就牽涉到排列組合的學問。排成一列，圍成一個圓圈或相鄰而坐是日常生活中經常遇到的情形。這也是最容易入題的情境。

遊戲 52

☆☆☆☆☆

假設有一五層滾輪的彈珠臺外形，如下圖所示：




彈珠可隨機地由頂端的任一個位置滾下來，且一定會撞到最頂層的滾輪，撞到滾輪後的彈珠會等機會往左或往右下滾。此外若彈珠撞到偶數層的最左右兩側滾輪，且經過碰撞後，彈珠滾向兩側牆壁，則彈珠最後的位置就是左右兩側的位置，請計算彈珠出現在各個位置的機率？

〔玩鎖・玩索〕

此題爲九十四學年度國立中央大學數學系申請入學考試試題，以台灣的彈珠臺爲設計背景。由於彈珠臺有五層滾輪的關係，可以考慮 5 階二項式定理的係數1,5,10,10,5,1之分配。排列，組合與機率是因爲博弈而誕生的數學分支，所以跟博弈相關的內容也是考試的最佳典範。

# 動手玩數學~破解秘笈 第12期

**遊戲 45**

可以依以下的次序完成：

*RSTVWXHJKLMNPCDFGBZOR* .

**遊戲 46**

令銅的厚度為$\dfrac{x}{2}$尺，此時箱子內部的長、寬與高分別是$5-x$，$4-x$與$3-x$尺，內部體積為$(5-x)(4-x)(3-x)$立方尺。根據比例，

$$\frac{(5-x)(4-x)(3-x)}{5\times4\times3}=\frac{21}{11+21}$$

整理得

$$8x^3-96x^2+376x-165=0\ .$$

利用牛頓定理，其可能的整係數一次因式為$px-q$，而且整數$p$與$q$必須滿足$p|8$，$q|165$。逐一代入，得$2x-1$整除三次多項式$8x^3-96x^2+376x-165$，且

$$\begin{aligned}&8x^3-96x^2+376x-165\\&=(2x-1)(4x^2-46x+165).\end{aligned}$$

因為$4x^2-46x+165=0$的兩根為虛根，所以實數$x=\dfrac{1}{2}$。故銅的厚度是$\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{4}$尺。

**遊戲 47**

每一次對摺的時候，紙的面積減半，但厚度加倍，例如經過七次對摺後，紙的面積只是原來的$\dfrac{1}{128}$，厚度卻是原來的 128 倍，這就好比將家裡的整包衛生紙對摺同一回事。所以想要將紙張對摺八次或九次是很困難的。

**玩鎖．玩索**

填滿棋盤所需的麥子總數為

$$1+2^1+2^2+\cdots+2^{63}=\frac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1$$

粒。據估算，以目前世界的小麥產量，需要 150 年的時間才能生產出宰相所要求的數量。

**遊戲 48**

$B-EGD$與$H-ACF$是兩個邊長為$\sqrt{2}$的正四面體。

# 龍騰數亦優

讀者意見調查表

## 一、對《龍騰數亦優》各篇文章，您到目前爲止的閱讀狀態如何？各篇文章的參考價值如何？

| 參考價值 有 | 參考價值 無 | 篇名 | 閱讀狀況有 全部讀完 | 重要部份讀完 | 略翻 | 完全沒讀 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | 1. 華羅庚金杯精英邀請賽 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| ☐ | ☐ | 2. 數學期望值 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| ☐ | ☐ | 3. 插值多項式 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| ☐ | ☐ | 4. 師範大學數學系 99 學年度推甄試題 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| ☐ | ☐ | 5. Apollonius 問題兼談三條件決定圓(二) | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| ☐ | ☐ | 6. 動手玩數學專欄 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| ☐ | ☐ | 7. 第 12 期動手玩數學破解秘笈 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

整體而言，以上文章您最喜歡哪一篇？編號：________________

爲什麼？________________________

________________________

________________________

## 二、內容實用度

您認爲《龍騰數亦優》最實用的三篇文章是：

(1)____________________

(2)____________________

(3)____________________

您認爲《龍騰數亦優》內可有可無的三篇文章是：

(1)____________________

(2)____________________

(3)____________________

理由爲：____________________

____________________

## 三、對本期《龍騰數亦優》的意見

1. 題材的選擇
   ☐ 恰到好處　☐ 普通　☐ 不符需求
2. 內容的深度
   ☐ 艱澀難懂　☐ 普通　☐ 過於淺顯
3. 實用的效果
   ☐ 效果佳　☐ 普通　☐ 效果不佳
4. 標題前言
   ☐ 吸引人　☐ 普通　☐ 不吸引人
5. 照片插畫
   ☐ 清晰簡明　☐ 普通　☐ 複雜模糊
6. 整體呈現方式
   ☐ 美觀大方　☐ 普通　☐ 不利閱讀

您對本書之整體意見：________________

____________________

____________________

____________________

____________________

## 五、個人資料

姓名：________________　電話：(O)________________　(H)________________

任教學校：________________　任教年級：________________　任教科目：________________

地址：☐☐☐________________________________

E-mail：________________________________

# 龍騰數亦優

親愛的讀者，您好：

感謝您對《龍騰數亦優》的支持，秉持著不斷精益求精的一貫信念，我們特別設計了這份問卷，希望藉由讀者的看法及意見，幫助我們更加精進。

謝謝您耐心填寫此信問卷，再次感謝您對我們的支持與愛護！

敬祝

教 學 愉 快

《龍騰數亦優》期刊　敬上

請自行黏貼後直接投郵

| 廣 告 回 信 |
| --- |
| 台灣北區郵政管理局登記證 |
| 北台字第 3032 號 |

免貼郵票．限時專送

**248**

**台北縣五股鄉五權七路 1 號**

**龍騰數亦優　期刊編輯室收**