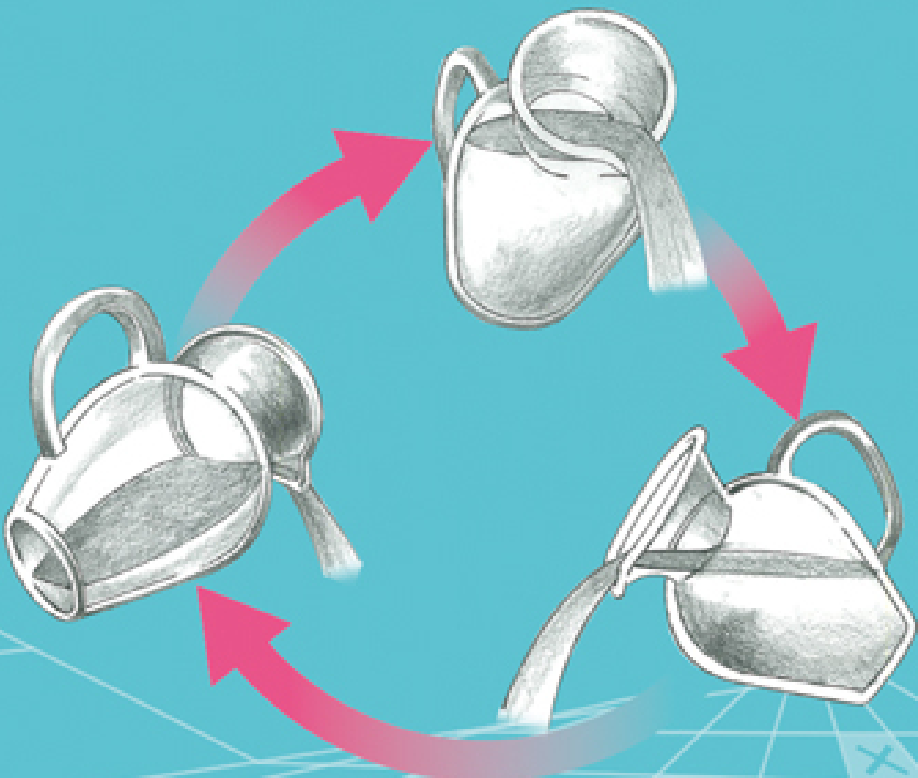
龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

第10刊



龍騰文化

編輯室墨記

上一期的《數學美拾趣》引起多方好評，本期《數學美拾趣（二）》延續其精神，繼續帶領大家體會數學之美。其中的「轉移矩陣」引出了98年指定科目考試數學乙中的倒水問題，歡迎您一起來欣賞。

正十七邊形的尺規作圖法，是大數學家高斯（Karl Gauss）在他十九歲時所獲得的一項研究成果，它是高斯一生中許許多多數學成果中的第一項。高斯對他的這一項成果顯然非常喜歡，才會讓正十七邊形的標誌出現在他的墓碑上，永遠陪伴一代大師。許多人在求學期間都聽說過這些歷史典故，只是可能沒有機會見識到高斯如何以直尺和圓規作出正十七邊形的方法。本期特邀師大數學系趙文敏教授爲我們介紹這個尺規作圖法，並證明這個作圖法的正確性。

「排列組合」中的「塗色問題」，是否常常造成您的困擾呢？陽明高中羅驥韡老師特別介紹一種新的思考模式與分析方法，讓您無論遇到任何種類的圖形，都能輕鬆找出塗色方法總數。

令人期待的「動手玩數學」專欄，精心設計了各種以圓錐曲線爲材料的數學問題，想要了解生活中有關雙曲線與拋物線的應用，那就絕對不能錯過！

發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：陳韻嵐
副總編輯：林美蘭
執行編輯：顏貝珊
美術編輯：彭文君

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248台北縣五股鄉五權七路1號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2299-5311
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2009/11/15
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

目次 CONTENTS

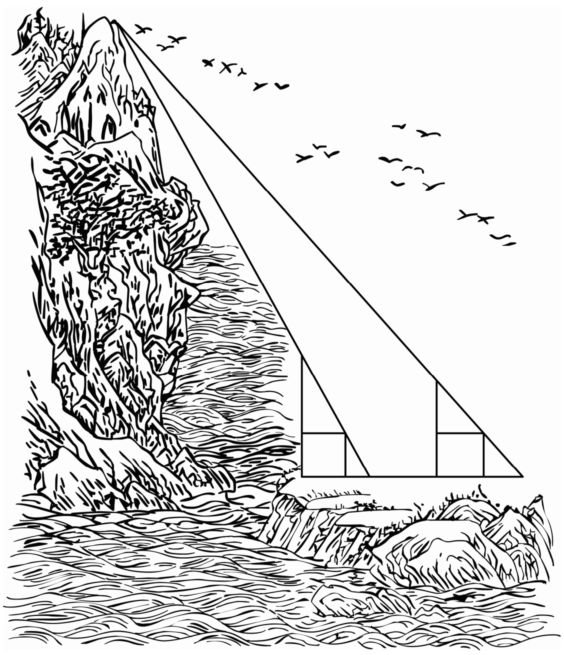
許教授講故事 STORY

中國最早的測量問題...劉徽的海島算經

◎許志農／台灣師範大學數學系

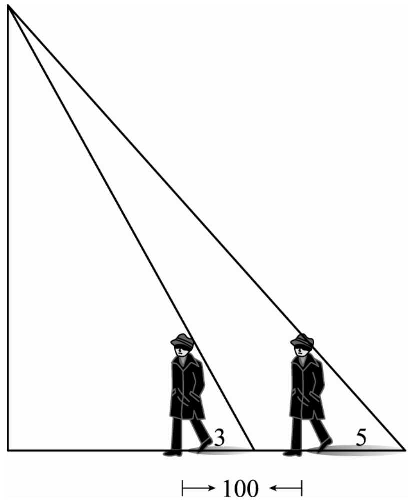
測量與計算是一對孿生兄弟，有了測量數據後，必須借用有效的數學公式，才能經由計算得到更多想要知道的數據。相似三角形的對應邊之邊長成比例與勾股定理是國中生常用的計算公式，而正弦與餘弦定理則是高中生的計算公式。

劉徽的《海島算經》只有九道測量問題被留傳下來，其中的第一題可說是最經典、最常被引用的問題。

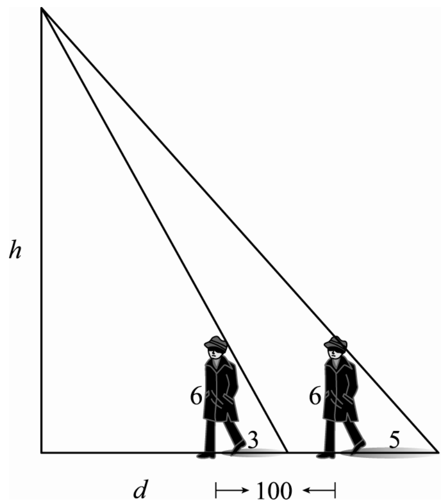


這裡提出《海島算經》的第一題給讀者回味，同時它也是台北縣九十六學年度縣立高中職數學科競賽的口試試題。

1 夜黑風高的晚上，只有海島頂端的一盞明燈可以照亮大地。有一位 6 尺高的人在海邊測得其影子長 5 尺，當此人向明燈的方向前進 100 尺後，再次測量得到影子長為 3 尺。聰明的你可以算出海島高度嗎？



設海島高度為 h，此人第二次測量影長所站地點與海島的距離為 d，如下圖所示：

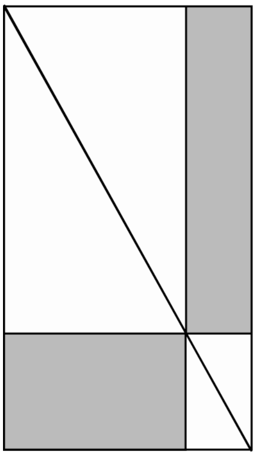


從《海島算經》的測量圖，我們可以理解：當時是以相似三角形的比例關係來求解 h 與 d。順著上圖所產生的相似三角形比例式

$$\frac{6}{h}=\frac{3}{3+d}\ ,\ \frac{6}{h}=\frac{5}{5+100+d}\ ,$$

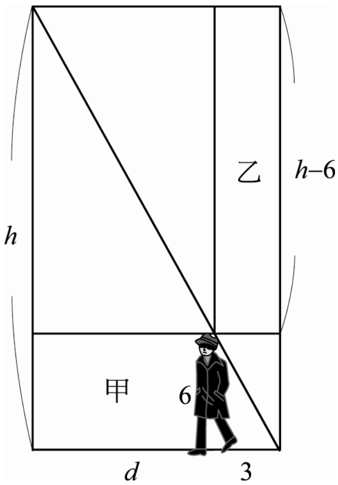
解得 $d=150$, $h=306$.

前面我們是以相似三角形邊長成比例的數學公式來算得海島的高度，這裡另外提出一個計算海島高度的數學模型：如下圖所示，在矩形上畫一條對角線，對角線上任取一點，過此點作鉛直與水平線。此時不通過對角線的兩塊小矩形之面積必相等。



這個模型的證明並不難，我們利用此模型來算海島高度。

從第二次測量點得到如下的矩形：



因為甲、乙兩個矩形有相同的面積，所以

$$6\times d=(h-6)\times 3\ .$$

同理，從第一次觀測點可以得到面積相等的方程式為

$$6\times(d+100)=(h-6)\times 5\ .$$

解聯立方程式組

$$\begin{cases}6\times d=(h-6)\times 3\\ 6\times(d+100)=(h-6)\times 5\end{cases}$$

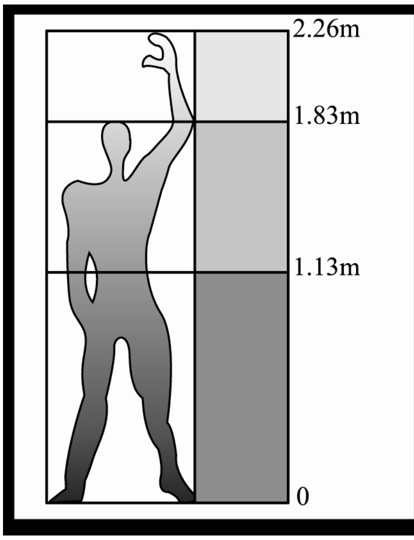
得 $h=306$, $d=150$.

故海島高度為 306 尺。

數學美拾趣（二）

◎許志農／台灣師範大學數學系

❶ 舉手投足都是美



羅伯特・文森特整理一本很有趣的美學書籍，它的書名叫作《黃金比例的幾何》，在這本書裡，文森特蒐集了相當豐富的各種幾何圖片，而這些圖片所呈現的共通點就是都跟黃金比例有關，黃金比例 1.618 是書裡所要傳達的唯一數字。

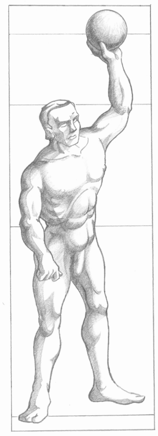
左圖就是書裡的一幅人體幾何圖，描述人們舉手投足的美學比例，而右側所標示的高度正是人體美學的密碼，究竟高度 1.13, 1.83 與 2.26 與黃金比例 1.618 產生怎樣的共鳴呢？

達文西是將人體各部位的比例研究得相當清楚的科學家，關於人體比例，肚臍扮演著舉足輕重的角色。在上圖中，一個人將手舉高，頭頂到手指最高點的距離為 a ，頭頂到肚臍的距離為 b ，肚臍到腳底的距離為 c 。人體美學告訴我們，當這三數 $a,\ b,\ c$ 成等比數列，而且公比為

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$

時，身體比例最理想。

習題：

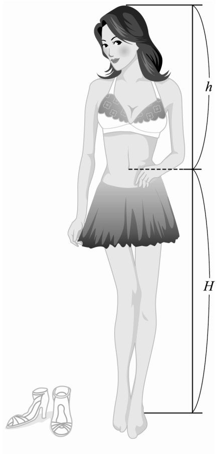


1. 右圖是手上高舉一顆球的素描圖，從上而下四條平行線之間的距離分別為 $a,\ b,\ c$。當此人身體比例最理想時，證明
$$c=a+b.$$

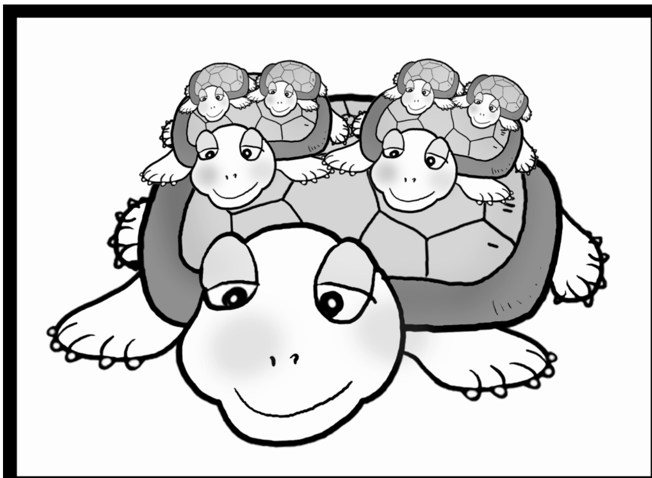
2. 洗澡時拿皮尺量一下自己的頭頂至肚臍高度及身高，並算一下
$$\frac{\text{頭頂至肚臍高度}}{\text{身高}}$$
這個比值。

3. 承上題，如果身體比例最理想，那麼
$$\frac{\text{頭頂至肚臍高度}}{\text{身高}}$$
這個比例應該是多少？

4. 志玲姊姊身高 173 公分，頭頂至肚臍高度 105 公分。請問她應該穿幾公分（取整數）高的高跟鞋，才會看起來最像完美女人？



② 阿基米德的馱龜幻想曲

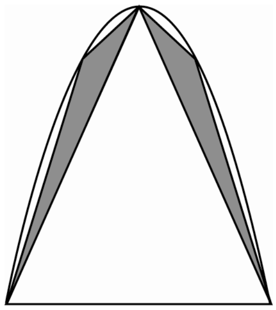


割之彌細，所失彌少，
割之又割，以至於不可割，
則與圓周合體而無所失矣。

劉徽為了論述圓面積而發明了割圓術，並將割圓術的精神用文字「割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣」來描述。不僅是東方的劉徽對圓有「割之又割，以至於不可割」的困擾，西方的阿基米德在求拋物線的弓形面積時，也發生同樣的情況。他們所不同的地方是，阿基米德採取了馱龜的比喻來闡釋拋物線的弓形面積。就讓我們來欣賞阿基米德的馱龜幻想曲：

一隻大烏龜馱上兩隻中烏龜，這兩隻中烏龜的重量都是大烏龜的八分之一，而每隻中烏龜又背著兩隻小烏龜，這兩隻小烏龜的重量也都是中烏龜的八分之一，如此疊上去。已知最底下的大烏龜有 3 公斤重，求所有烏龜的總重量？

拋物線與弦所圍的區域稱為拋物線的弓形，世界上第一位會算拋物線弓形面積的人是兩千多年前的阿基米德。阿基米德以弦為底畫出一個三角形，之後在兩邊再各畫一個三角形，如下圖所示：



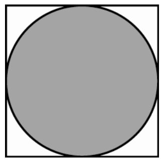
阿基米德說：「如果依照這樣的規律一直畫下去，那麼這些三角形的面積總和就會是拋物線的弓形面積。」直觀看來，兩者的差異愈來愈小，問題是這些三角形有無窮多個，而且不知道該如何求其面積總和？阿基米德進一步說：「馱在上面的兩個三角形之面積和是底下這個三角形面積的四分之一，由此可推得拋物線的弓形面積是最大三角形面積的三分之四倍。」在沒有微積分的幫忙之下，能夠算出這樣的結果，算是出類拔萃之人。

將上述情境中的三角形改成烏龜，面積視為烏龜的重量，就是這裡所談的問題！

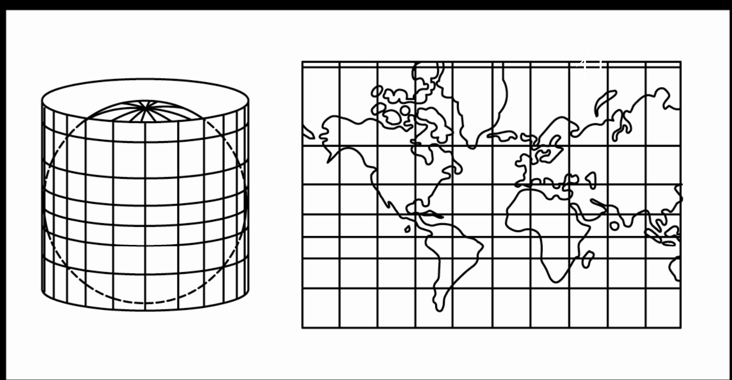
「割之又割，以至於不可割」與「畫之再畫，以至於不可再畫三角形」是劉徽與阿基米德所碰到的共同困擾。物理學家費曼先生提過一則有趣的故事：「給你一顆橘子及一把刀，將橘子切成薄片，有辦法讓薄片薄到足以蓋著整個地球表面嗎？」費曼先生利用這道問題來檢驗學生是數學思考還是物理考量。

習題：

1. 利用無窮等比級數的求和公式計算烏龜的重量總和。
2. 請討論費曼先生的問題。
3. 右圖是半徑為 1 的圓與邊長為 2 的正方形相切的情形。讓電腦隨意從正方形內選出 1000 個點，你認為這 1000 個點中，有幾個點會落在圓內？



③ 地球平面圖



橘子的皮可以剝掉，但無法讓這些皮躺平在平面上，同理，用地圖來表示地球表面的相關位置也會碰到難題。幾何學家如何處理這樣的難題呢？

經線與緯線是地球上最重要的兩組線，它們是互相垂直的兩組大圓線，而赤道又是最重要的一條緯線。如同橘子皮無法攤平在桌面上一樣，想將地球表面繪製成一張平面式的地圖也是沒辦法的。右圖是一種投影式的製圖方式，想像將一張紙張圍成圓柱，且剛好與地球的赤道相切。此時，從地球中心將地表投影在該紙張上，就形成地圖。這樣製成的地圖有幾項特色：

(1) 南極與北極不在地圖上，這是因為它們兩點被投影至無窮遠處的關係。

(2) 南北兩極附近的土地變形，而且變大了，這是因為讓紙張與赤道相切的關係。

(3) 緯線被投影成水平線，而經線變成鉛直線。

這裡所介紹的地圖稱為麥卡托圓柱投影法繪成的地圖。

習題：

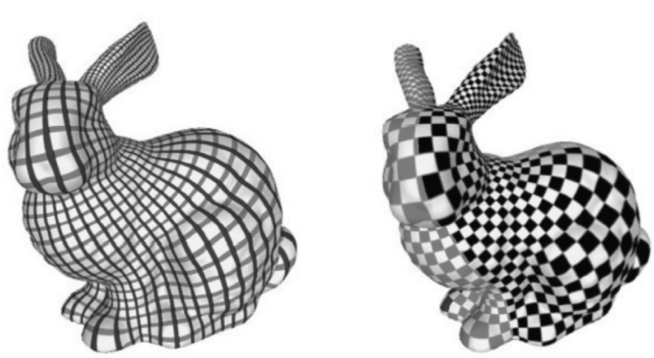
1. 用麥卡托圓柱投影法繪成的地圖，圖上不一定成直線的是
   (A)經線　(B)緯線　(C)同方位線　(D)大圓線　(E)赤道。

2. 世界第一大島格陵蘭的面積約為南美洲的九分之一，但在麥卡托圓柱投影法繪成的地圖上來看，面積幾乎一樣。究竟問題出在哪裡？

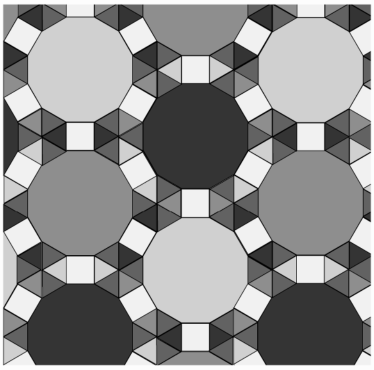
3. 地球上相同距離的兩點，投影在地圖上是否都等距？

4. 上網查詢，寫出其他兩種繪製地圖的方法。

5. 我們在兔子的身體表面上制作圖形，其上有互相垂直的曲線，攤平在平面上就是普通的坐標系統。這是丘成桐院士在〈古典幾何在電腦繪圖及醫學影像之應用〉演講中的舉例。說明你對這兩個表面圖形的觀察與領悟。（下圖刊登在 2006 年紐約時報）



④ 柯施克的正十二邊形定理—典雅的鑲嵌

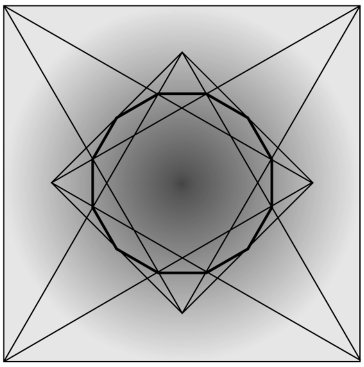


同樣邊長的正三角形、正方形與正十二邊形磁磚可以鑲嵌、鋪滿整個平面。正十二邊形究竟有何魅力？且讓我們來欣賞匈牙利數學家**柯施克**利用幾何鑲嵌所證明的一道定理：

半徑 1 的圓內接正十二邊形的面積剛好為 3。

以數學為內容的競賽有著悠久的歷史：古希臘時就有解幾何難題的比賽；十三世紀在義大利有所謂的宮廷數學競賽，斐波那契參加過這項考試，其著作《花朵》就涵蓋了宮廷數學競賽的一些問題；十六世紀在義大利有過關於塔塔利亞求解三次方程的激烈競爭；十七世紀，不少數學家喜歡提出一些問題向其他數學家挑戰，費馬所提出的費馬大定理就是一個例子；十九世紀，法國科學院以懸賞的方法徵求對數學難題的解答，常常獲得一些重要的數學發現，高斯就是比賽的優勝者。但是，專門以中學生為對象的數學競賽源於匈牙利，在1894年，匈牙利舉辦第一屆由高中學生參加的數學競賽，此競賽每年十月舉行，每次出三題，限四小時完成，允許使用任何參考書。到今天已經舉辦了一百多屆，為了感謝匈牙利數學家柯施克（J. Kurschak, 1864～1933）當初對此競賽所付出的努力及其對數學的貢獻，這項比賽也改以柯施克數學競賽來命名。我們在市面買到的匈牙利數學競賽問題與解答就是當年柯施克編輯的。

在中學幾何，柯施克有一項重要成就，他不用面積的代數公式，而單純只用幾何構造，證明了「單位圓內接正十二邊形的面積剛好為 3 。」



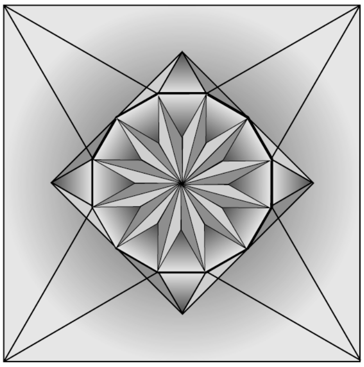
上圖就是柯施克構造正十二邊形的方法：

(1) 先畫一個大正方形，分別將此正方形的四邊向內畫出四個正三角形。

(2) 這四個正三角形的頂點（在大正方形內）構成一個小正方形。

(3) 將小正方形四邊上的四個中點與四個正三角形的八個交點（如上圖所示）依序連接起來，構成一個十二邊形。

根據柯施克構造法所畫出的十二邊形為正十二邊形，甚至柯施克還將小正方形進一步分割，讓這小正方形被分割成正三角形T與鈍角等腰三角形E，如下圖所示：



柯施克用正三角形T與鈍角等腰三角形E來鑲嵌正方形，其中用了16個正三角形與32個等腰三角形。如果小正方形的邊長為2，即柯施克構造的十二邊形為單位圓內接正十二邊形，那麼小正方形的面積4與16個正三角形與32個等腰三角形的面積和一樣，即

$$16T + 32E = 4.$$

又柯施克正十二邊形是由12個正三角形與24個等腰三角形鑲嵌而成，因此其面積為

$$12T + 24E = \frac{3}{4}(16T + 32E) = \frac{3}{4} \times 4 = 3.$$

這就是柯施克定理的推理過程，既神奇又漂亮吧！

習題：

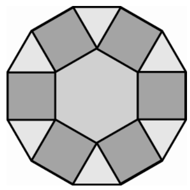
1. 求正十二邊形的一個內角度數。

2. 當柯施克小正方形的邊長為2時（即柯施克正十二邊形為單位圓內接正十二邊形），求外面的大正方形邊長。

3. 利用高中所學的面積公式證明：單位圓內接正十二邊形的面積為3。

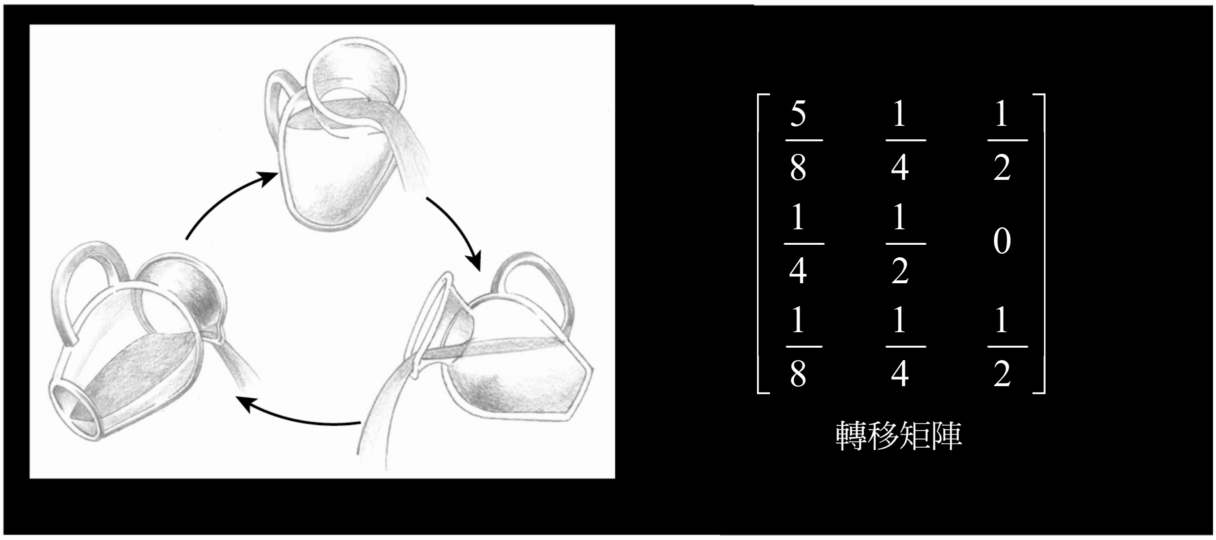
4. 求鈍角等腰三角形E的最大內角度數。

5. 右圖是將單位圓內接正十二邊形分割成正三角形、正方形與正六邊形的情形。若T, S分別代表正三角形與正方形的面積，則利用柯施克定理求下列的值：



   (1) $4T + 2S$
   (2) S.

⑤ 轉移矩陣



倒水問題是一道有趣的數學問題，大意是說：「有甲、乙及丙三個水瓶，開始時分別裝有 a, b 及 c 公升的水。每一輪操作都是先將甲瓶的水倒出一半到乙瓶，再將乙瓶的水倒出一半到丙瓶，然後再將丙瓶的水倒出一半回甲瓶。設 n 輪操作後，甲、乙及丙瓶的水有 a_n, b_n 及 c_n 公升，如何將 a_n, b_n 及 c_n 的公式表達出來？若一直操作下去，三瓶子裡的水會穩定下來嗎？如果會，那麼最終三瓶子各會有水幾公升？」

轉移矩陣

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

是解決「倒水問題」的關鍵。所謂的轉移矩陣就是指每行的數字和都是 1，而且矩陣的每個元素都大於或等於 0 的矩陣，例如上述三階方陣的三行的和都是 1，而且每個元素都大於或等於 0。當我們仔細去計算時，可以得到遞迴關係式

$$\begin{cases} a_1 = \frac{5}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \\ b_1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 0c \\ c_1 = \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

進一步可以推得

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = P^n \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

當操作一直進行下去時，三瓶子裡的水是會趨近穩定狀態的，而且甲、乙及丙瓶的水在穩定狀態時的比例 $x:y:z$ 會滿足

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} \frac{5}{8}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=x \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y+0z=y \\ \frac{1}{8}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=z \end{cases},$$

解得 $x:y:z=2:1:1$。因為三瓶子裡的總水量是 $a+b+c$ 公升，所以甲、乙及丙三個水瓶在穩定狀態時的水量分別為

$$\frac{a+b+c}{2}, \frac{a+b+c}{4} \text{ 及 } \frac{a+b+c}{4}$$

公升。

從上面的詮釋可知：倒水問題是一道不容易的趣題，它牽扯到矩陣的概念，而且是相當深的概念。在瓶子只有兩個時，得到的轉移矩陣是二階方陣，會比較好處理，九十八年度的大學聯考就考過這樣的特例。

習題：

1. （98 數乙指考試題）設有 A, B 兩支大瓶子，開始時，A 瓶裝有 a 公升的純酒精，B 瓶裝有 b 公升的礦泉水。每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶，然後再將 B 瓶的溶液倒出一半回 A 瓶（不考慮酒精與水混合後體積的縮小）。設 n 輪操作後，A 瓶有 a_n 公升的溶液，B 瓶有 b_n 公升的溶液。已知二階方陣

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

滿足

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

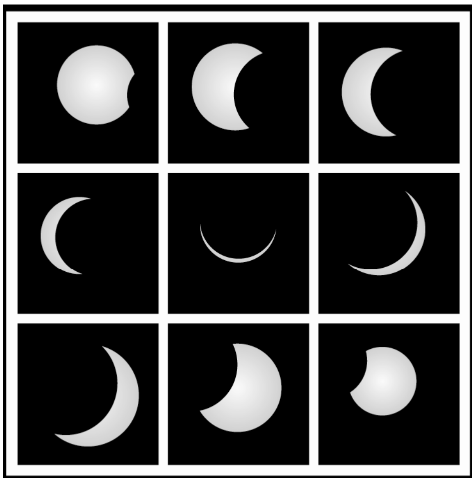
(1) 求二階方陣

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

(2) 當 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$ 時，求 a_{100} 及 b_{100} 。

(3) 當 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$ 時，在第二輪操作後，A 瓶的溶液中有百分之多少的酒精？

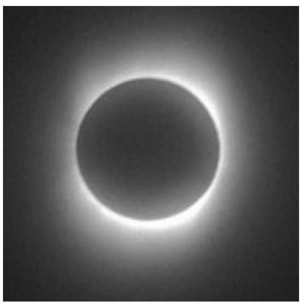
6 天狗食日─兩圓關係



天狗食日是一種天文學上的遮蔽現象，也稱為日蝕，就是太陽被月亮遮蔽所產生的天文現象。因為太陽與月亮離我們很遠，所以這個現象有點像一個會發光的圓被另一個不會發光的圓遮蔽部分的情景。用數學的語言來說，日蝕就是「兩圓的關係。」

中國有世界上最早、最完整、最豐富的日蝕記錄，光是古書史料就有1000多次日蝕記錄。最早一次是《尚書》記載的發生在西元前1948年的日蝕。西方最有名的日蝕記載是在西元前585年，這次的日蝕，適值希臘的李定人和米底人兩族交惡，正當作戰時，忽遇日蝕，疑為天帝來譴責他們，均起恐懼，而自動媾和停戰，因日蝕而帶來和平，真是難得的事。

愛因斯坦 1915 年提出「星光經過太陽附近時，應有 1.75 秒的彎曲（星光會在質量大的天體附近出現曲折）」的預測，但太陽旁邊的星光，除非在日全蝕時，否則是看不見的。天文家躍躍欲試，等待日全蝕的到來，以肯定或否定愛因斯坦的預測。



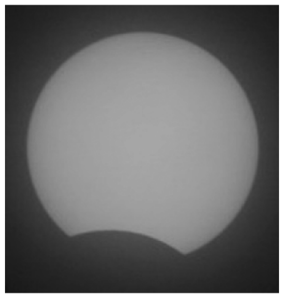
1919 年 5 月 29 日的日全蝕，英國人在巴西北部和非洲一島上所攝照相成功了，完全證明了愛因斯坦所預料星光經過太陽旁會曲折的現象。日蝕可以說是稍縱即逝，只有幾分鐘的時間，在日蝕發生的短暫時間裡，一般民眾是湊熱鬧，欣賞太陽與月亮兩圓相割的表面過程，而科學家卻利用這難得的機會探索太陽背後那些星星的天文真相。

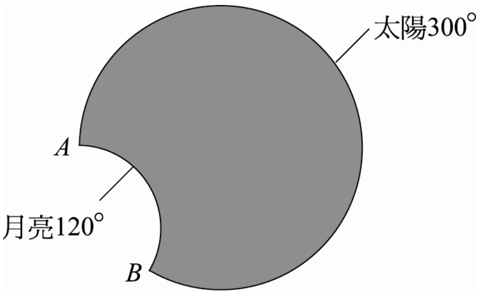
根據統計，一年內發生日蝕的次數如下：

2次	72.5%
3次	17.5%
4次	9.5%
5次	0.5%

習題：

1. 右圖是 2009 年 7 月 22 日發生日蝕時，所拍攝的一張照片（略圖如下）。已知月球將不完全覆蓋住太陽，且太陽優弧 AB 對太陽是 300 度，月球侵蝕的 AB 弧則對月球是 120 度，太陽半徑 $6\sqrt{3}$：





(1) 求月球半徑。

(2) 求日蝕面積。

⑦ 散熱的雙曲線造型—知、懂、熟、用、賞

學習數學的五種階段「知、懂、熟、用、賞」：

知：知道它。
懂：了解它。
熟：熟悉它（讓它成為頭腦的自然反應）。
用：使用它。
賞：欣賞它（日常生活中賞析它的變形）。

大陸的一本數學書籍用「知，懂，熟，用，賞」來評估數學學習的五個階段，事實上，不僅是科學，即使是文學、藝術或美術，這五種境界也是好的評估方式。

我們以數學的勾股定理來說，學生從知道勾股定理（小學時期），到會推導證明，熟記在腦中（國中時期），進步到很會應用勾股定理解題（高中時期）。但是勾股定理對一般大眾來說，如何在日常生活中欣賞到它的存在的背影才是重點，也是最後與最高的境界。

好的泡茶玻璃器皿瓶頸附近的平滑曲線應該要愈接近雙曲線愈好，道理何在呢？一般吹玻璃的工人會認為瓶頸的功能僅是「縮口，好拿」而已，但是懂得雙曲線知識的人可不這樣認為。雙曲線的漸近線告訴我們，雙曲線是很像直線的曲線，讓瓶頸附近的截面吹成雙曲線的形式，不僅水流順暢，散熱也比較容易。所以當你欣賞泡茶的玻璃器皿時，瓶頸附近的曲線才是精髓。

同樣的情形也被使用在冷卻塔上，在大河的旁邊有時會出現如右圖的煙囪形狀，事實上，他們並不是煙囪，而是幫電廠散熱用的冷卻塔。當河邊的水被汲取，抽到冷卻塔上方往下流時，因為塔頸的雙曲線造形，自然產生跟泡茶玻璃器皿一樣的散熱效果。

習題：

1. 法鼓山創辦人對人與人的相處提出過五種境界：「面對它，處理它，接受它，放下它，超越它。」這跟學習科學的五個階段「知，懂，熟，用，賞」是否有相通之處？

正十七邊形的尺規作圖法

◎ 趙文敏／台灣師範大學數學系

正十七邊形的尺規作圖法，是大數學家高斯（Karl Gauss）在他十九歲時所獲得的一項研究成果，它是高斯一生中許許多多數學成果中的第一項。高斯對他的這一項成果顯然非常喜歡，才會讓正十七邊形的標誌出現在他的墓碑上，永遠陪伴一代大師。許多人在求學期間都聽說過這些歷史典故，只是可能沒有機會見識到高斯如何以直尺和圓規作出正十七邊形的方法。在本文中，我們將介紹這個尺規作圖法，更重要的是：當然要證明這個作圖法的正確性。

甲 割圓方程式

在歐氏幾何中，哪些邊數的正多邊形可以用尺規作圖，這自然是一個備受關注的問題。早在紀元前三世紀時，歐幾里得（Euclid）在他的名著《幾何原本》（Elements）中，就已經記載有邊數為 3、4、5 的正多邊形的尺規作圖法。至於由 3、4、5 所衍生的邊數為 2^n 、$2^n\times 3$ 、$2^n\times 5$ 與 $2^n\times 15$ 的正多邊形，其尺規作圖法也早為數學家所熟知。至於其他邊數的正多邊形，還有哪些確定可以用尺規作圖、或有哪些確定不能用尺規作圖，這兩個問題在歐幾里得之後的兩千年間，數學家們一直無法給出完整的答案。事實上，正多邊形的尺規作圖這個幾何問題，只利用歐氏幾何學中的理論與方法，是無法解決的。它必須仰賴數論與代數的理論與方法。

西元 1796 年，年僅十九歲而就讀於德國哥廷根（Göttingen）大學的高斯，開始喜歡上多項方程式的求解問題，尤其對形如 $x^n-1=0$ 的多項方程式更感興趣。根據棣美弗（De Moivre）定理，方程式 $x^n-1=0$ 的 n 個根就是

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\text{，}(\,k\in\boldsymbol{N}\text{，}1\le k\le n\,)\text{。}$$

在複數平面上，上述 n 個複數所代表的點是單位圓的一個內接正 n 邊形的 n 個頂點，其中一個頂點是實軸上的單位點 1。因為這個緣故，方程式 $x^n-1=0$ 稱為割圓方程式（cyclotomic equation）。除了單位點 1 外，棣美弗定理只告訴我們其他根的表示法，卻沒有給出這些根的實際數值。在下文中，根據高斯的方法，我們可以寫出 $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ 的值。

高斯在他的名著 Disquisitiones Arithmeticae 最後一節中，討論了次數為質數的割圓方程式。他證明：若 p 是質數，則可以找到一序列的方程式

$$Z_1=0,\quad Z_2=0,\quad Z_3=0,\ \cdots\cdots, \tag{$*$}$$

使得：

(1) 方程式 $x^p-1=0$ 的根都可以表示成(∗)式中各方程式之根的有理函數；

(2) 在(∗)式中，每個方程式的次數都是 $p-1$ 的質因數；

(3) 在(∗)式中，每個方程式的係數都是其前面各方程式之根的有理函數。

當質數 p 是 $2^{2^m}+1$ 的形式時（其中的 m 是非負整數），我們稱它為費馬質數（Fermat prime）。3、5、17、257 與 65537 是目前僅知的費馬質數。根據高斯的前述結論，當 p 是費馬質數時，因為 $p-1$ 只有一個質因數 2，所以，方程式 $x^p-1=0$ 的根可以由一序列的二次方程式之根來表示。由於二次方程式之根所含的根號都只是二次根號，而二次根號都可以利用直尺和圓規作圖，所以，高斯得到一個很重要的結論：若正整數 n 的標準分解式為 $2^k p_1 p_2 \cdots p_r$，其中的 k 為非負整數而 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 是兩兩相異的費馬質數，則正 n 邊形可以利用直尺和圓規作圖。事實上，這個定理的逆敘述也成立，亦即：若正 n 邊形可以利用直尺和圓規作圖，則 n 必是前面所提的形式。這個逆定理高斯並沒有給予證明，它的第一個證明是 Pierre Wantzel 在 1837 年提出來的。

哪些邊數的正多邊形可以利用直尺和圓規作圖這個幾何問題，至此才完全解決。例如：在邊數不大於 100 的正多邊形中，可以利用直尺和圓規作圖的正多邊形邊數有下面 24 個：

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30,
32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96。

因為 257 與 65537 都是費馬質數，所以，正 257 邊形與正 65537 邊形也都可以利用直尺和圓規作圖。西元 1898 年，Richelot 與 Schwendenheim 曾作了一個正 257 多邊形。更有趣的是，O. Hermes 曾作了一個正 65537 邊形，完成後將它捐贈給高斯的母校哥廷根大學，這件作圖工程花了他十年的時間，作品足足裝滿好大一個箱子。

乙 正十七邊形尺規作圖法的代數原理

在方程式 $x^{17}-1=0$ 的虛根中，若令

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}\ ,$$

則依棣美弗定理，方程式 $x^{17}-1=0$ 的全體虛根為 ω^k（$k\in\boldsymbol{N}$ 且 $1\le k\le 16$）。因為 ω 滿足 $\omega^{17}-1=0$ 而 $\omega\ne 1$，所以，可得

$$1+\sum_{k=1}^{16}\omega^k=\frac{\omega^{17}-1}{\omega-1}=0\ ,\qquad 或\quad \sum_{k=1}^{16}\omega^k=-1\ 。$$

現在，將方程式 $x^{17}-1=0$ 的全體虛根依下述規則排成一個數列：(1) 首項為 ω；(2) 自第二項起，每一項都等於其前一項的三次方。但當任一項中 ω 的次數大於 17 時，則依 $\omega^{17}=1$ 降低其次數。例如：第四項原為 ω^{27}，可改寫成 ω^{10}。根據此規則所得的數列如下：

$$\omega,\ \omega^3,\ \omega^9,\ \omega^{10},\ \omega^{13},\ \omega^5,\ \omega^{15},\ \omega^{11},\ \omega^{16},\ \omega^{14},\ \omega^8,\ \omega^7,\ \omega^4,\ \omega^{12},\ \omega^2,\ \omega^6\ 。(**)$$

接著，將數列(**)的奇數項依序寫成一級數、偶數項也依序寫成一級數，令其和分別為

$$z_1=\omega+\omega^9+\omega^{13}+\omega^{15}+\omega^{16}+\omega^8+\omega^4+\omega^2\ ,$$
$$z_2=\omega^3+\omega^{10}+\omega^5+\omega^{11}+\omega^{14}+\omega^7+\omega^{12}+\omega^6\ 。$$

略作計算，可得

$$z_1+z_2=\sum_{k=1}^{16}\omega^k=-1\ ,$$

$$\begin{aligned}z_1\times z_2&=\omega^4+\omega^{12}+\omega^{16}+\omega+\omega^2+\omega^{11}+\omega^7+\omega^5\\&\quad+\omega^{11}+\omega^2+\omega^6+\omega^8+\omega^9+\omega+\omega^{14}+\omega^{12}\\&\quad+\omega^6+\omega^{14}+\omega+\omega^3+\omega^4+\omega^{13}+\omega^9+\omega^7\\&\quad+\omega^{12}+\omega^3+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}+\omega^2+\omega^{15}+\omega^{13}\\&\quad+\omega^{15}+\omega^6+\omega^{10}+\omega^{12}+\omega^{13}+\omega^5+\omega+\omega^{16}\\&\quad+\omega^8+\omega^{16}+\omega^3+\omega^5+\omega^6+\omega^{15}+\omega^{11}+\omega^9\\&\quad+\omega^{13}+\omega^4+\omega^8+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^3+\omega^{16}+\omega^{14}\\&\quad+\omega^7+\omega^{15}+\omega^2+\omega^4+\omega^5+\omega^{14}+\omega^{10}+\omega^8\\&=4\times\left(\sum_{k=1}^{16}\omega^k\right)=-4\ 。\end{aligned}$$

由此可知：z_1與z_2是方程式$z^2+z-4=0$的兩根$\dfrac{\left(-1\pm\sqrt{17}\right)}{2}$。因為

$$\begin{aligned}
z_2&=(\omega^3+\omega^{14})+(\omega^5+\omega^{12})+(\omega^6+\omega^{11})+(\omega^7+\omega^{10})\\
&=2\cos\frac{6\pi}{17}+2\cos\frac{10\pi}{17}+2\cos\frac{12\pi}{17}+2\cos\frac{14\pi}{17}\\
&=2\cos\frac{6\pi}{17}-2\cos\frac{7\pi}{17}-2\cos\frac{5\pi}{17}-2\cos\frac{3\pi}{17}\\
&=2\left(\cos\frac{6\pi}{17}-\cos\frac{3\pi}{17}\right)-2\cos\frac{7\pi}{17}-2\cos\frac{5\pi}{17}\\
&<0\text{，}
\end{aligned}$$

所以，可得

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\text{，}\quad z_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\text{。}$$

其次，將和等於z_1的級數中奇數項依序寫成一級數、偶數項也依序寫成一級數，令其和分別為

$$y_1=\omega+\omega^{13}+\omega^{16}+\omega^4\text{，}$$

$$y_2=\omega^9+\omega^{15}+\omega^8+\omega^2\text{。}$$

略作計算，可得

$$\begin{aligned}
&y_1+y_2=z_1\text{，}\\
&y_1\times y_2=\omega^{10}+\omega^5+\omega^8+\omega^{13}+\omega^{16}+\omega^{11}+\omega^{14}+\omega^2\\
&\qquad\qquad+\omega^9+\omega^4+\omega^7+\omega^{12}+\omega^3+\omega^{15}+\omega+\omega^6\\
&\qquad\quad=-1\text{，}
\end{aligned}$$

由此可知：y_1與y_2是方程式$y^2-z_1y-1=0$的兩根$\dfrac{\left(z_1\pm\sqrt{z_1^2+4}\right)}{2}$。因為

$$y_1=(\omega+\omega^{16})+(\omega^4+\omega^{13})=2\cos\frac{2\pi}{17}+2\cos\frac{8\pi}{17}>0\text{，}$$

所以，可得

$$y_1=\frac{z_1+\sqrt{z_1^2+4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\text{，}$$

$$y_2=\frac{z_1-\sqrt{z_1^2+4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\text{。}$$

同理，將和等於 z_2 的級數中奇數項依序寫成一級數、偶數項也依序寫成一級數，令其和分別為

$$y_1' = \omega^3 + \omega^5 + \omega^{14} + \omega^{12} \text{，}$$
$$y_2' = \omega^{10} + \omega^{11} + \omega^7 + \omega^6 \text{。}$$

略作計算，可得

$$\begin{aligned} y_1' + y_2' &= z_2 \text{，} \\ y_1' \times y_2' &= \omega^{13} + \omega^{15} + \omega^7 + \omega^5 + \omega^{14} + \omega^{16} + \omega^8 + \omega^6 \\ &\quad + \omega^{10} + \omega^{12} + \omega^4 + \omega^2 + \omega^9 + \omega^{11} + \omega^3 + \omega \\ &= -1 \text{，} \end{aligned}$$

由此可知：y_1' 與 y_2' 是方程式 $y^2 - z_2 y - 1 = 0$ 的兩根 $\dfrac{\left(z_2 \pm \sqrt{z_2^2 + 4}\right)}{2}$。因為

$$y_2' = (\omega^6 + \omega^{11}) + (\omega^7 + \omega^{10}) = 2\cos\frac{12\pi}{17} + 2\cos\frac{14\pi}{17} < 0 \text{，}$$

所以，可得

$$y_1' = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + 4}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \text{，}$$
$$y_2' = \frac{z_2 - \sqrt{z_2^2 + 4}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \text{。}$$

最後，將和等於 y_1 的級數中奇數項依序寫成一級數、偶數項也依序寫成一級數，令其和分別為

$$x_1 = \omega + \omega^{16} \text{，}$$
$$x_2 = \omega^{13} + \omega^4 \text{。}$$

略作計算，可得

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= y_1 \text{，} \\ x_1 \times x_2 &= \omega^{14} + \omega^{12} + \omega^5 + \omega^3 = y_1' \text{。} \end{aligned}$$

由此可知：x_1 與 x_2 是方程式 $x^2 - y_1 x + y_1' = 0$ 的兩根 $\dfrac{\left(y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4y_1'}\right)}{2}$。因為

$$x_1 - x_2 = (\omega + \omega^{16}) - (\omega^4 + \omega^{13}) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{17} - \cos\frac{8\pi}{17}\right) > 0 \text{，}$$

所以，可得

$$x_1 = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4y_1'}}{2} \text{，} \quad x_2 = \frac{y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_1'}}{2} \text{。}$$

綜合前述結果，可以將$\cos\left(\dfrac{2\pi}{17}\right)$的值計算如下：

$$
\begin{aligned}
16\left(y_1^2-4y_1'\right) &= \left(18-2\sqrt{17}+2\left(-1+\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}+34-2\sqrt{17}\right)\\
&\quad -\left(-16-16\sqrt{17}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)\\
&= 68+12\sqrt{17}+2\left(\sqrt{17}-1\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\\
&= 68+12\sqrt{17}+2\left(\sqrt{17}+1\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\
&= 68+12\sqrt{17}+\frac{34+2\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\
&= 68+12\sqrt{17}+\left(\frac{\sqrt{34^2-4\times 17}}{\sqrt{17}}-16\right)\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\
&= 68+12\sqrt{17}-8\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}\ ，
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{17} &= \frac{y_1}{4}+\frac{\sqrt{y_1^2-4y_1'}}{4}\\
&= \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}+\frac{\sqrt{68+12\sqrt{17}-8\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}{16}\\
&= \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}+\frac{\sqrt{17+3\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}{8}\ 。
\end{aligned}
$$

因為$\cos\left(\dfrac{2\pi}{17}\right)$的值可以只使用有理數與二次根號來表示，所以，利用直尺和圓規可作出長度等於$\cos\left(\dfrac{2\pi}{17}\right)$的線段，也因此可作出弧度值等於$\dfrac{2\pi}{17}$的角，這就表示利用直尺和圓規可作出正十七邊形。

本小節中所得的四個方程式，再加上以ω與ω^{16}為根的方程式，如此所成的方程式序列，就是針對方程式$x^{17}-1=0$，甲小節(*)式中所指的方程式序列：

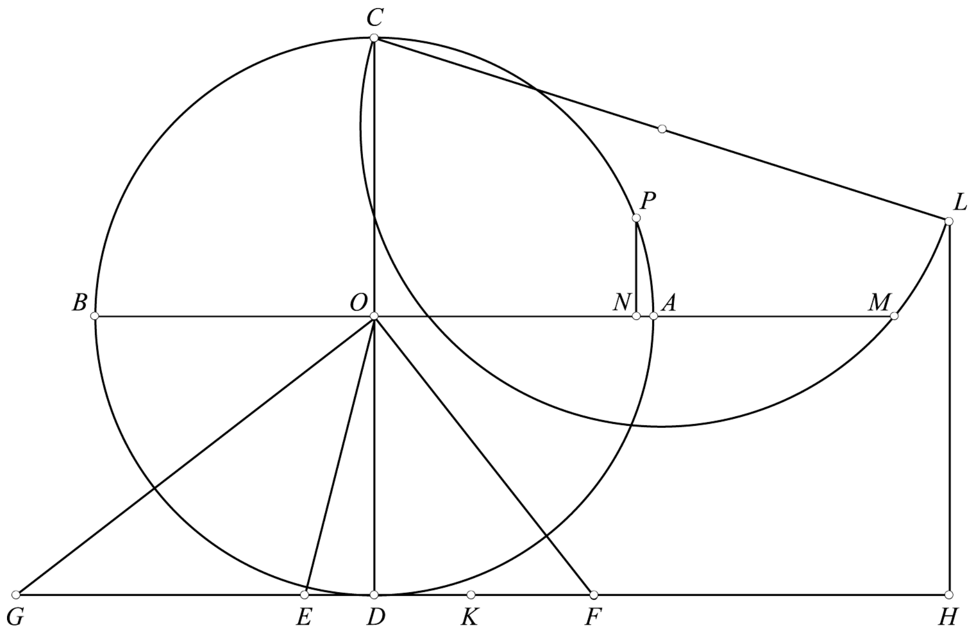
$$z^2+z-4=0\ ，\quad y^2-z_1y-1=0\ ，\quad y^2-z_2y-1=0\ ，$$

$$x^2-y_1x+y_1'=0\ ，\quad t^2-x_1t+1=0\ 。$$

顯然地，這五個方程式確實滿足甲小節中的(1)、(2)、(3)等三個性質。請注意：前四個方程式的根都是實數。

丙 正十七邊形的尺規作圖法

實際以直尺和圓規作正十七邊形時，我們並不必用到上述所求的 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{17}\right)$ 值的數值表示公式，而只須依次作出長度為 z_1 、 $-z_2$ 、 y_1 、 y_1' 的線段，再利用 y_1 、 y_1' 與 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{17}\right)$ 的關係式即可。



以直尺和圓規作正十七邊形的過程如下：

(1) 作一單位圓 O 及一對互相垂直的直徑 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 。

(2) 在圓 O 過點 D 的切線上作一點 E 使得：點 E 與點 A 在直線 CD 的異側且 $\overline{DE}=\dfrac{1}{4}$ 。

(3) 在直線 DE 上作點 F 與 G 使得： $\overline{EF}=\overline{EG}=\overline{EO}$ 且點 F 與點 D 在點 E 的同側。

(4) 在直線 DE 上作點 H 與 K 使得： $\overline{FH}=\overline{FO}$ 、 $\overline{GK}=\overline{GO}$ 且點 H 與點 G 在點 F 的異側、點 K 介於點 F 與點 G 之間。

(5) 在過點 H 且與直線 DE 垂直的直線上作點 L 使得： $\overline{HL}=1+\overline{DK}$ 且點 L 與點 A 在直線 DE 的同側。

(6) 在直線 OA 上作點 M 使得：點 M 在以 $\overline{CL}$ 為直徑的圓上且 $\overline{OM}>1$ 。

(7) 設點 P 是 $\overline{OM}$ 的垂直平分線與圓 O 的任一交點，則 $\overline{AP}$ 是圓 O 的內接正十七邊形的一邊。

下面我們要證明上述(7)的結論成立。

首先，因為$\overline{OD}=1$、$\overline{DE}=\dfrac{1}{4}$且$\overline{OD}\perp\overline{DE}$，所以，$\overline{OE}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$。於是，得

$$\overline{DF}=\overline{EF}-\overline{DE}=\overline{OE}-\overline{DE}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}=\frac{z_1}{2}\ ,$$

$$\overline{DG}=\overline{EG}+\overline{DE}=\overline{OE}+\overline{DE}=\frac{\sqrt{17}+1}{4}=\frac{-z_2}{2}\ 。$$

其次，因為$\overline{OD}=1$、$\overline{DF}=\dfrac{z_1}{2}$且$\overline{OD}\perp\overline{DF}$，所以，$\overline{OF}=\dfrac{\sqrt{z_1^2+4}}{2}$。因為$\overline{OD}=1$、$\overline{DG}=\dfrac{-z_2}{2}$且$\overline{OD}\perp\overline{DG}$，所以，$\overline{OG}=\dfrac{\sqrt{z_2^2+4}}{2}$。於是，得

$$\overline{DH}=\overline{DF}+\overline{FH}=\overline{DF}+\overline{OF}=\frac{z_1+\sqrt{z_1^2+4}}{2}=y_1\ ,$$

$$\overline{DK}=\overline{GK}-\overline{DG}=\overline{OG}-\overline{DG}=\frac{z_2+\sqrt{z_2^2+4}}{2}=y_1'\ 。$$

再其次，選取一個直角坐標系，使得點O為原點、點A的坐標為$(1,0)$、點C的坐標為$(0,1)$。因為直線HL與y軸平行、$\overline{HL}=\overline{OD}+\overline{DK}$且點$L$與$x$軸在直線$DE$的同側，所以，點$L$在第一象限，其坐標為$(\overline{DH},\overline{DK})$或寫成$(y_1,y_1')$。

於是，以$\overline{CL}$為直徑的圓的方程式

$$(x-0)(x-y_1)+(y-1)(y-y_1')=0\ 。$$

此圓與x軸的交點M的x坐標是下述方程式的根：

$$x^2-y_1x+y_1'=0\ 。$$

因為$\overline{OM}>1$，所以，可得

$$\overline{OM}=\frac{y_1+\sqrt{y_1^2-4y_1'}}{2}=2\cos\frac{2\pi}{17}\ ,$$

$$\overline{ON}=\frac{1}{2}\overline{OM}=\cos\frac{2\pi}{17}\ ,$$

其中，點 N 是$\overline{OM}$的中點。因為$\overline{OP}=1$且$\overline{PN}\perp\overline{ON}$，所以，$\angle PON=\dfrac{2\pi}{17}$，$\overline{AP}$是圓$O$的內接正十七邊形的一邊，這就是上述(7)所敘述的結論。

讀者可以依照本小節的作圖法，作出上述圖形後，再檢查AP弧是否確實是圓O之圓周的十七分之一。

當高斯在 1796 年完成一件過去兩千年無人能想像的成果之後，有一天他興沖沖地去見他的一位老師 Abraham Gotthelf Kästner，告訴 Kästner 說正十七邊形可以利用直尺和圓規作圖，Kästner 不相信而認為高斯異想天開。Kästner 並沒有仔細看高斯的證明，只告訴高斯這種作圖法並不重要，因為近似作圖法已為人所知。為了引發 Kästner 的興趣，高斯說他解了一個十七次方程式，Kästner 回答說這是不可能的。高斯補充說，他是化成較低次方程式來求解的，Kästner 還諷刺說，他自己早就這樣做過了。也許我們不能批評 Kästner 太過自信，因為過去兩千年來，數學家們一直相信除了 3 與 5 之外，再也沒有其他的正質數邊形可以利用直尺和圓規作圖。他只是沒料到在他的學生群中，有一位是屬於「兩百年必有王者興」的大師吧！

丁 「3」有何玄機

在乙小節中引出方程式 $z^2+z-4=0$ 時，是先以兩個特殊級數的和作為它的根，而這兩個特殊級數則是由 $x^{17}-1=0$ 的所有虛根排出的特殊數列(**)所得出的，這個特殊數列(**)的排列規則是「(1) 首項為 ω；(2) 自第二項起，每一項都等於其前一項的三次方。」這裡所要求的「三次方」,「3」到底有何玄機？還有別的正整數可以取代嗎？

對於 17 來說，3 的玄機就是：根據「(1) 首項為 ω；(2) 自第二項起，每一項都等於其前一項的三次方。」的規則，列出的十六項數列(**)恰好是 $x^{17}-1=0$ 的十六個相異虛根。這種現象稱為「3 是模 17 的一原根（a primitive root modulo 17）。」如果把 3 改成 2，則所列出十六項數列只出現 $x^{17}-1=0$ 的八個虛根。如果把 3 改成 4，則所列出十六項數列只出現 $x^{17}-1=0$ 的四個虛根。因此，2 與 4 都不是模 17 的原根。

原根的定義其實不必像前段借助方根 ω，我們敘述如下：設 p 為一質數而 a 為一整數。若 $p-1$ 項數列 $a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\cdots,\ a^{p-1}$ 中任何兩項的差都不能被 p 整除，則稱 a 是模 p 的一個原根。

還有其他正整數是模 17 的原根嗎？答案是：「還有七個」。它們就是數列(**)的其他偶數項的乘冪：10、5、11、14、7、12、6。用這七個數的任何一個代替 3，仿照乙小節的方法，寫出一個十六項數列、兩個八項級數、四個四項級數、兩個二項級數，最後會得出與本文乙小節相同的四個二次方程式。

戊 結尾語：一碟小菜

因為 5 是一個很小的費馬質數，所以，用本文的方法來討論正五邊形的尺規作圖，只能算是一碟小菜，讀者很容易上手。

首先，3 也是模 5 的一個原根。仿照乙小節的方法所作的數列(**)只有四項，以奇數項的和 x_1 與偶數的和 x_2 為兩根的方程式是

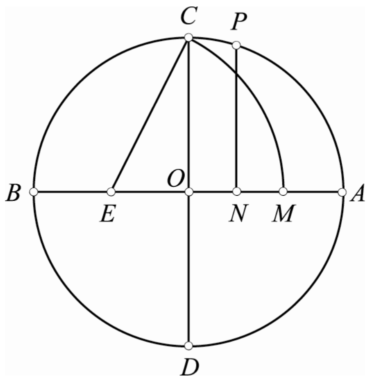
$$x^2+x-1=0\text{ ，}$$

而且奇數項的和 x_1 是上述方程式的正根，此根就是 $2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$。

於是，針對方程式 $x^5-1=0$，甲小節(*)式中所指的方程式序列只有下述兩方程式：

$$x^2+x-1=0\text{ ，}\quad t^2-x_1t+1=0\text{ 。}$$

仿照本文丙小節的作圖法，只用到步驟(1)、(2)、(3)與(7)，就可得出下圖，其中的 $\overline{AP}$ 就是圓 O 的內接正五邊形的一邊。細節留給讀者自證之。



舊的塗色問題，新的計算方法

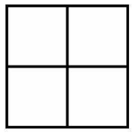
◎羅驥韡／台北市立陽明高中

塗色問題

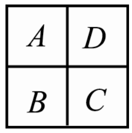
在高中「排列組合」的課程範圍中，有一類常出現的問題就是「塗色問題」。

例如：

在右圖中，如果我們利用 5 種不同的顏色來塗，然後規定「相鄰的區域不能塗同樣的顏色」，那麼總共有幾種不同的塗法？



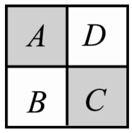
一般，如果我們用傳統的方式來分析此題，可能會這樣解題：首先，先將四個區域分成 $ABCD$ 四區（如圖）。再來，因為 A 區與 C 區不相鄰，所以可能同色也可能不同色，因此，我們分成兩個狀況來討論：



- A 與 C 同色：

  假設我們從 A、C 開始塗色，因為我們有 5 種不同的顏色可以塗，所以剛開始有 5 種選擇。再來塗 B，因為 AC 已經用掉一種顏色，所以 B 有 4 種顏色可以選。最後塗 D，因為 D 只要與 AC 不同即可，所以 D 還有 4 種顏色可以塗。所以總結，A 與 C 同色這種情況共有：

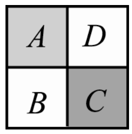
  $5\times4\times4=80$ 種不同的塗法。



- A 與 C 不同色：

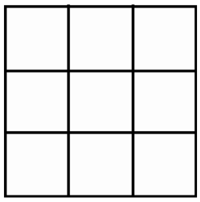
  如果還是從 A 開始，那麼 A 有 5 種顏色可以選。C 因為與 A 不同，所以只有 4 種選擇。B 又分別與 A、C 相鄰，所以選擇數只剩下 3 種。同樣道理，D 也只有 3 種顏色可以選。因此，這種情況共有：

  $5\times4\times3\times3=180$ 種不同的塗法。



綜合以上兩種情況，這個塗色問題共有：$80+180=260$ 種不同的塗法。

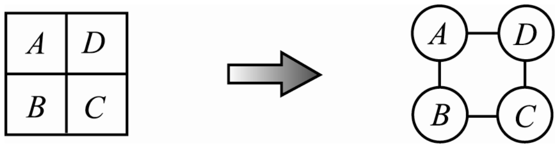
這樣的分析方法固然沒什麼不對，但是如果原來的問題是要將 5 種不同的顏色塗在如右圖的圖中呢？那麼我們又要分成多少種不同的狀況來討論呢？或者，如果我們的圖形又遠比右圖還複雜呢？這時，這樣的分析方法難道不會陷入雜亂無章的窘境嗎？



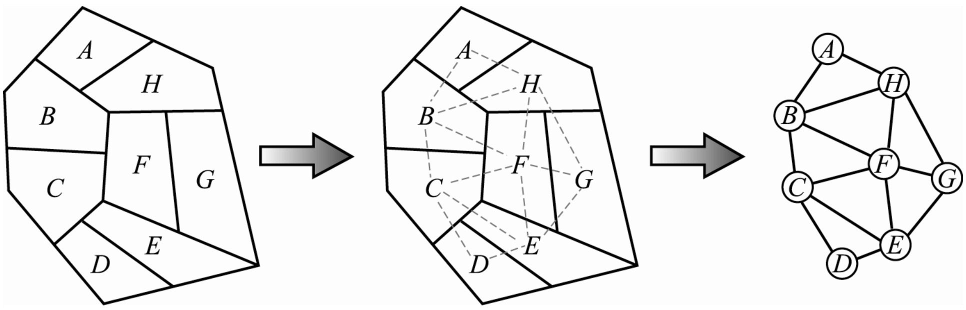
因此，在這裡我要介紹一種分析方法，不但可以對付任何種類的圖形，我們甚至可以設計出電腦可以計算的程式，讓電腦可以直接算出答案來，省下我們不少的手算時間。

新的思考模式

如下圖，我們可以將原來的圖變成另一個圖。首先，不同的區域，我們用一個圈圈來代表；其次，相鄰的區域，**我們用一條線連起來，表示它們彼此相鄰**。利用這樣新的表示方法，我們就可以將原來的圖轉換成新的圖。

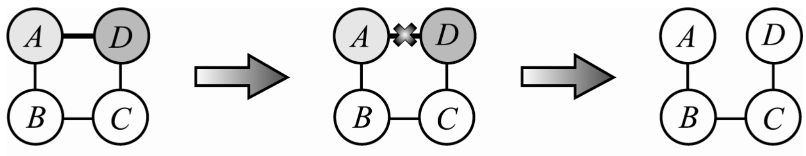


下圖再舉一個例子。



接下來，我們來討論這樣的轉變，可以帶來什麼樣的新算法。

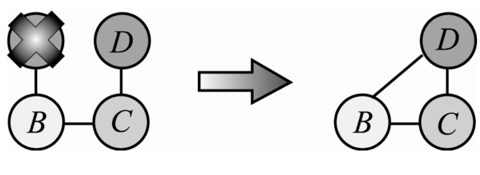
前面看到，相鄰的區域顏色不能相同，所以換句話說，有線連在一起的區域，顏色不能相同。但現在請考慮以下的想法：假設我們有 5 種顏色可以用，然後要計算下面「圖一」有幾種不同的塗法。如果我們將「圖二」中的某個連接線去掉，變成「圖三」的樣子，那麼「圖一」與「圖三」的塗法總數有什麼差別？



<圖一> <圖二> <圖三>

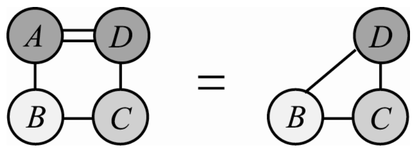
「圖一」中，A 與 D 相連，所以顏色不同；「圖三」中，我們將 A 與 D 中間的連接線去掉，因此表示它們「不相鄰」，所以顏色可以相同（當然也可以不相同）。綜合以上的觀察，我們知道「圖三」的塗法總數會比「圖一」還多，因為「圖三」的 A 與 D 顏色可以一樣，而這些塗法（A 與 D 一樣）正是「圖三」比「圖一」多出來的東西，所以我們要扣掉它們。現在我們來好好研究一下這些「多出來的東西」。

當 A 與 D 顏色相同時，我們可以讓 A 與 D「合體」，只留下 D，然後將**原來與 A 相連的連接線轉移給 D**（請看右圖）。這樣產生的新圖形，它的塗色方法就會跟「A 與 D 同色」時的塗色方法一樣多。



為什麼會這樣呢？假設我們在還沒刪掉 A 之前，塗了某些顏色到 A、B、C、D 四區（其中 A、D 同色），並且符合「有連接線的兩區不同色」的原則。現在，如果我們刪掉 A，然後將**原來與 A 相連的連接線轉移給 D**，這樣一來，本來與 A 不同色的區域就必須與 D 不同色，但這樣的作法並不會造成任何矛盾，因為 A 與 D 同色，所以與 A 不同色的區域自然就會與 D 不同色，因此原來的塗法也可以用在新的圖形上面，完全不會造成任何問題。另一方面，讓我們反過來看，如果我們塗了某些顏色到新的圖形上面，同樣也是在符合「有連接線的兩區不同色」的原則下，那麼我們會發現，這樣的塗法也可以用在原來的圖形上（其中 A、D 同色），同樣不會產生任何問題。

綜合以上的討論，我們得到一個重要的結果：「A、D 同色」的塗法剛好等於「新圖形」的塗法。我們用右圖來表達這樣的現象：其中，A 與 D 之間，我們用一個「雙鍵」來代表「A、D 同色」；兩圖之間，我們放了一個「等號」，表示兩圖的塗色方法數是一樣的。



牛刀小試

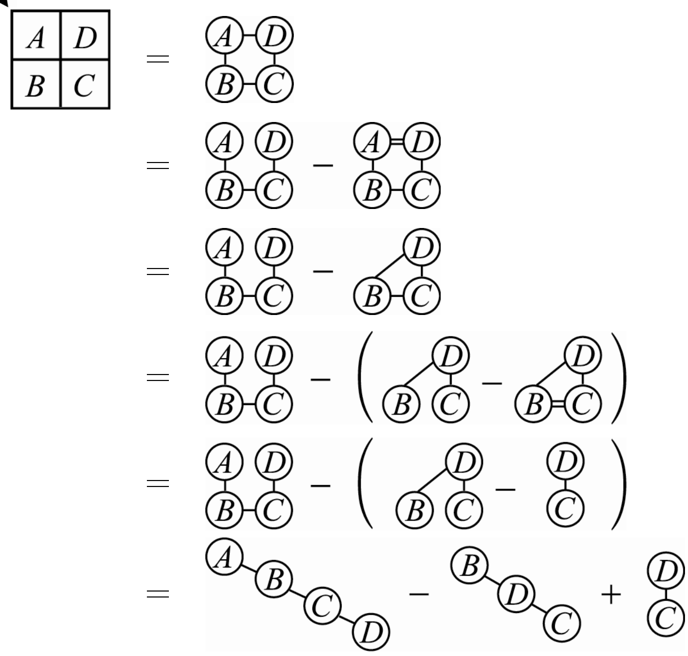
好了！介紹完一些我們所要使用的小發明，讓我們開始來計算原來的問題：

例題

1. 利用 m 種不同的顏色來塗右圖，相鄰不同色，則有幾種塗法？

A	D
B	C

解



將原來的圖轉換為新的圖

去掉 A、D 間的連線，並扣除多出來的塗法

當 A、D 同色時，可刪掉 A，並將 A 的連線轉移給 D

去掉 B、C 間的連線，並扣除多出來的塗法

當 B、C 同色時，可刪掉 B，並將 B 的連線轉移給 C

去除括號

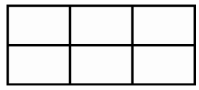
$$= m(m-1)^3 - m(m-1)^2 + m(m-1)$$

$$= (m-1)^4 + (m-1)$$

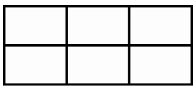
當 $m=5$ 時，$(m-1)^4+(m-1)=4^4+4=256+4=260$，而這個答案我們在前面也曾經利用傳統的方式計算過一次。

例題

2. 利用 m 種不同的顏色來塗右圖，相鄰不同色，則有幾種塗法？



解



$$= \begin{array}{ccccc} A & - & D & - & E \\ | & & | & & | \\ B & - & C & - & F \end{array}$$

換成新圖形

$$= \begin{array}{ccccc} A & - & D & - & E \\ | & & | & & \\ B & - & C & - & F \end{array} - \begin{array}{cccc} A & - & D & \\ | & & | & > E \\ B & - & C & \end{array}$$

打斷 E、F 連線，並合併 E、F，然後扣除之

$$= \begin{array}{ccccc} A & - & D & - & E \\ | & & | & & \\ B & - & C & - & F \end{array} - \left(\begin{array}{cccc} A & - & D & \\ | & & | & \\ B & - & C & / E \end{array} - \begin{array}{ccc} A & - & D \\ | & & | \\ B & - & C \end{array} \right)$$

打斷 D、E 連線，並合併 D、E，然後扣除之

$$= \begin{array}{ccccc} A & - & D & - & E \\ | & & | & & \\ B & - & C & - & F \end{array} - \begin{array}{ccccc} A & - & D & & \\ | & & | & & \\ B & - & C & - & E \end{array} + \begin{array}{ccc} A & - & D \\ | & & | \\ B & - & C \end{array}$$

去掉括號

$$= \left[(m-1)^4+(m-1)\right]\left[(m-1)^2-(m-1)+1\right]$$

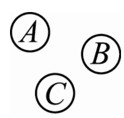
至於為什麼最後可以這樣計算，請繼續看後面的公式推導

公式推導

注意　在以下的討論中，我們都假設我們**有 m 種顏色**可用。

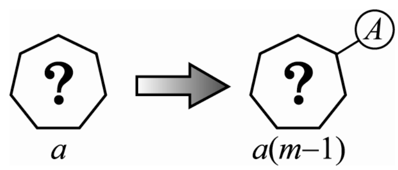
定理 **1.**

如果每個區域都**各自獨立**，彼此並不相鄰，就像右圖一般，那麼每個區域都有 m 色可用，所以如果有 3 個獨立區域，就會有 m^3 種塗色方法。一般而言，如果有 k 個獨立區域，就有 m^k 種塗色方法。



定理 **2.**

假設某個圖形原來有 a 種塗色的方法。如果在這個圖形外面再連接一個區域（如右圖），那麼新形成的圖形有 $a(m-1)$種塗色方法。



為什麼會這樣呢？因為圖中新增的區域 A 只要**跟它所連接的區域不同色**即可，因此區域 A 還有 $(m-1)$ 種顏色可以用，所以原有的圖形有 a 種塗色方法，再乘上區域 A 的 $(m-1)$ 種顏色，便會產生 $a(m-1)$ 種塗色方法。

到這裡，我們回頭來說明一下，之前我們是如何計算出下面的圖形的。

$$\begin{array}{ccccc} A & — & D & — & E \\ | & & | & & \\ B & — & C & — & F \end{array} \quad - \quad \begin{array}{ccccc} A & — & D & & \\ | & & | & & \\ B & — & C & — & E \end{array} \quad + \quad \begin{array}{ccc} A & — & D \\ | & & | \\ B & — & C \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} A & — & D \\ \vert & & \vert \\ B & — & C \end{array}$	在前面，我們已經算過左圖的塗色方法有 $(m-1)^4+(m-1)$ 種。
$\begin{array}{ccccc} A & — & D & & \\ \vert & & \vert & & \\ B & — & C & — & E \end{array}$	現在這個圖長了一根毛（E），所以根據「定理 2」，塗色方法變成 $\left[(m-1)^4+(m-1)\right]\cdot(m-1)$ 種。
$\begin{array}{ccccc} A & — & D & — & E \\ \vert & & \vert & & \\ B & — & C & — & F \end{array}$	這個圖又多長了一根毛，所以還是根據「定理 2」，塗色方法有 $\left[(m-1)^4+(m-1)\right]\cdot(m-1)\cdot(m-1)$ 種。

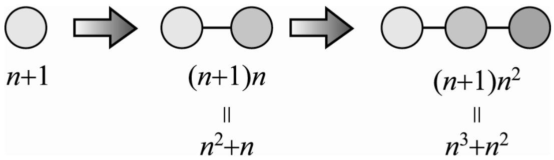
所以這也就是為什麼

$$\begin{array}{ccccc} A & — & D & — & E \\ | & & | & & \\ B & — & C & — & F \end{array} \quad - \quad \begin{array}{ccccc} A & — & D & & \\ | & & | & & \\ B & — & C & — & E \end{array} \quad + \quad \begin{array}{ccc} A & — & D \\ | & & | \\ B & — & C \end{array} \quad = \quad \left[(m-1)^4+(m-1)\right]\left[(m-1)^2-(m-1)+1\right]$$

的道理了！

注意 從上面的許多計算中，可以清楚的看到 $(m-1)$ 這個數字一直出現，所以在後面的討論中，為了讓計算式看起來比較簡潔，我們在此設定：$n=m-1$。

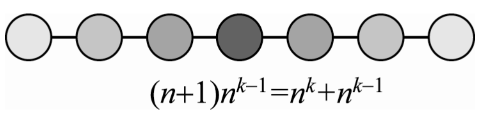
如果一個圖形長成類似下圖一樣的長鏈式的圖形，那麼它會有幾種塗法呢？



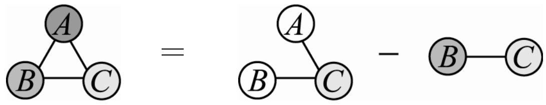
如果剛開始只有一個區域，當然我們會有 m 種顏色可以塗，或者寫成 $(n+1)$ 種。如果我們在這個區域後面接上另一個區域，那麼透過「定理 2」可知，原來的塗法總數必須再乘上 $(m-1)$，也就是再乘上 n，因此塗法總數會變成 $(n+1)n$。同樣的道理，如果我們繼續在後面又接一個區域，當然又要再乘上 n，因此塗法總數又會變成 $(n+1)n^2$。這個過程可以一直持續下去，所以我們將它整理成一個定理。

定理 3.（鏈狀圖形）

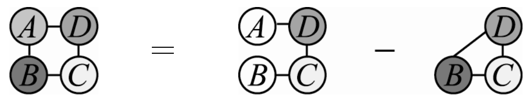
如果有 k 個區域（$k \geq 1$）串成一長鏈（如下圖），則它的塗法總數為 n^k+n^{k-1} 種。



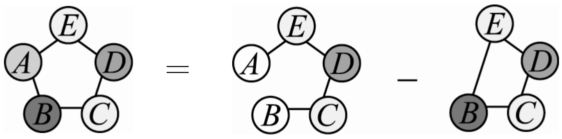
現在我們來考慮另一種圖形：環狀圖形。



我們將原來的圖形拆解成**兩個鏈狀**圖形，所以我們知道 3 個區域的環狀圖形可以利用 $(n^3+n^2)-(n^2+n^1)=n^3-n$ 來計算。



4 個區域的環狀圖形可以拆解成**一個鏈狀**，再扣掉**一個環狀**，所以塗法總數為：
$(n^4+n^3)-(n^3-n)=n^4+n$



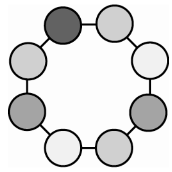
5 個區域的環狀圖形也是拆解成一個鏈狀，再扣掉一個環狀，所以塗法總數為：
$(n^5+n^4)-(n^4+n)=n^5-n$

從以上的討論，我們可以整理出一個有關環狀圖形的算法：

定理 4.（環狀圖形）

如果 k 個區域（ $k\geq 3$ ）圍成一個環狀，則塗法總數為

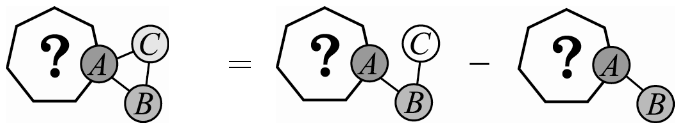
$$n^k+(-1)^k n$$



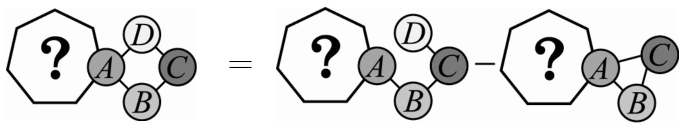
接下來，我們來討論一種新的情況：如果從原來的圖形「長出」一些新的結構，那麼塗色的方法又會如何改變。

注意 在以下的討論中，我們將**原來的圖形**用右圖的樣子來表示，並將它**原來的塗色方法數**設為 a。

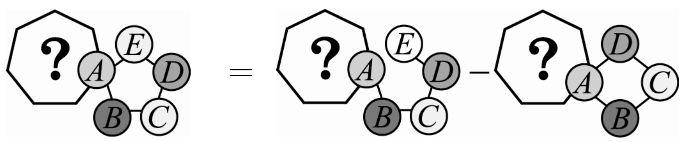
a



利用等號右邊的算法與「定理 2」來計算，得塗法數為：
$an^2-an=an(n-1)$ 種



利用同樣的推理方式，可推得塗法有：
$an^3-an(n-1)=an(n^2-n+1)$ 種



同理，這個環狀結構的塗法總共有：
$an^4-an(n^2-n+1)$
$=an(n^3-n^2+n-1)$

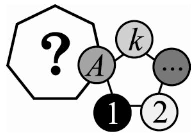
由於以上的觀察，我們可以歸納出一個公式。

定理 5.

假設一個圖形原有 a 種塗法。如果從這個圖形的某個節點 A 多**長出 k 個節點**並以**環狀**的方式連回 A 點，那麼這個新形成的圖形會有

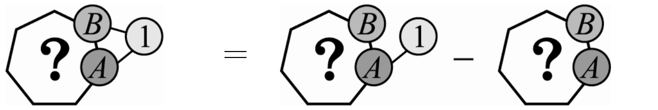
$$an\left(n^{k-1}-n^{k-2}+n^{k-3}-\cdots+(-1)^{k-1}\right)$$

種塗色的方法。

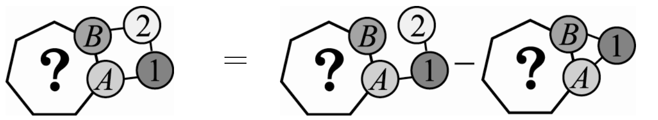


再來，我們來看看另一種「出芽」的情形。

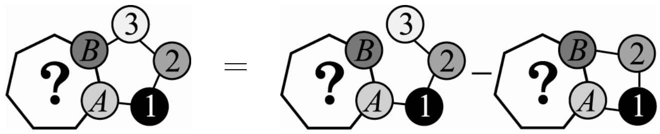
假設我們從原來圖形中的某個節點長出一個環狀結構，但並不是連回同一個節點，而是**連回它隔壁的節點**，這時塗法總數又會如何變化呢？請看以下的分析。



把節點 B 和節點 1 拆開，並扣掉節點 B 和節點 1 合併的情形，可得：
$an-a=a(n-1)$ 種塗法



把節點 B 和節點 2 拆開，並扣掉節點 B 和節點 2 合併的情形，可得：
$an^2-a(n-1)=a(n^2-n+1)$ 種



同理，這個圖形的塗法有：
$an^3-a(n^2-n+1)=a(n^3-n^2+n-1)$

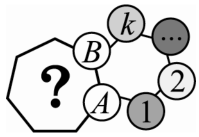
統整以上的經驗，我們可得以下的公式：

定理 6.

假設一個圖形原有 a 種塗法。如果從這個圖形的某個節點 A 多**長出 k 個節點**並以**環狀**的方式連回隔壁的 B 點，那麼這個新形成的圖形會有

$$a\left(n^{k}-n^{k-1}+n^{k-2}-\cdots+(-1)^{k}\right)$$

種塗色的方法。

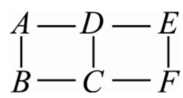


跟定理 5 一樣，這個公式也可以利用「等比級數」的公式來整理：

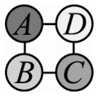
$$a\left(n^{k}-n^{k-1}+n^{k-2}-\cdots+(-1)^{k}\right)=a\cdot\frac{n^{k+1}-(-1)^{k+1}}{n+1}=\frac{a}{m}\left(n^{k+1}-(-1)^{k+1}\right)$$

好了！發展了一堆公式，現在是好好試試身手的時候了。

我們之前曾經花了很多力氣來計算右圖的塗法。現在讓我們來看看利用公式如何計算：

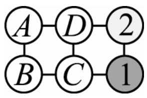


利用「定理 4」，我們知道：



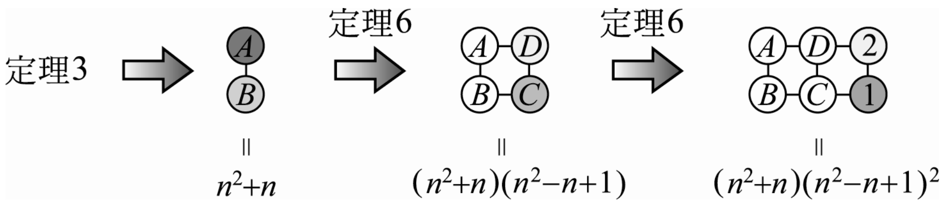
$$= n^4+(-1)^4 n = n^4+n$$

假設 $a=n^4+n$ ，利用「定理 6」，我們知道：



$$= a\left(n^2-n+1\right) = \left(n^4+n\right)\left(n^2-n+1\right)$$

當然，這個圖形我們也可以用下面的推理方式來計算：



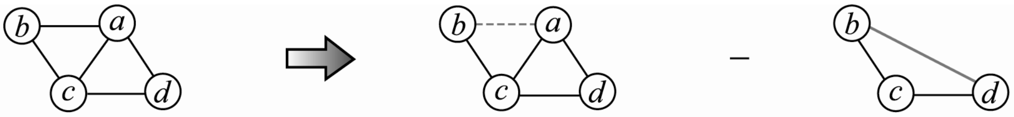
計算程式

有時，當圖形過於複雜，利用公式來計算還是太費時了，這時我們就不得不借助電腦的幫忙了。以下我們提供一個 Mathematica 的計算程式，來協助我們計算複雜的圖形：

程　　式　　碼	解　　　說
`f[k_,m_,{}]:= m^k;`	k：代表圖中有個 k 節點。 m：代表有 m 種顏色可以用。 {}：空「集合」代表目前的節點都是獨立的，這也就是「定理 1」的情況。

`f[k_,m_,s_]:= Module[{s1,s2,node1,node2},`
 	
`  node1 = s[[1]][[1]];`
`  node2 = s[[1]][[2]];`
`  s1 = Delete[s,1];`
`  s2 = Union[s1/.node1->node2];`
 	
`  f[k,m,s1]-f[k-1,m,s2]`
`];`
	s：表示節點之間的連結集合。
	node1：表示第一個連結的第一個節點。
	node2：表示第一個連結的第二個節點。
	s1：表示刪掉 s 的第一個連結後的集合。
	s2：表示 s1 中，如果有 node1 那就把它換成 node2。

這個程式的算法，其實說穿了，就是我們在「新的思考模式」那個段落所說明的計算方式。下圖進一步解說了此程式的執行方式：



拆掉a, b連結之前
a, b的顏色必須不同

拆掉a, b連結之後
a, b的顏色可以相同

扣掉將 a, b視為相同時
可以有的塗法數
註：a原有的連結由b繼承

f[4,4,R_1]

R_1={
  {a,b},{a,c},{a,d},
  {b,c},{c,d}
}

=

f[4,4,R_2]

R_2={
  {a,c},{a,d},
  {b,c},{c,d}
}

−

f[3,4,R_3]

R_3={
  {b,c},{b,d},
  ~~{b,c}~~,{c,d}
}

下面我們來看一個實際的執行範例：

```
In[1]: s={{1,2},{1,4},{2,3},{2,5},{3,6},{4,5},{4,7},{5,6},{5,8},{6,9},{7,8},{8,9}};
In[2]: f[9,5,s]
Out[2]: 142820
```

右圖有 9 個節點，由電腦執行的結果得知，如果我們用 5 種顏色來塗，相鄰不同色，則會有 142820 種塗法。

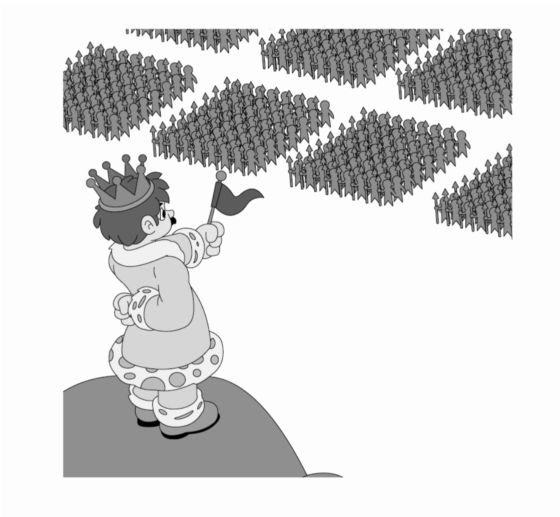
1	2	3
4	5	6
7	8	9

透過這樣的分析方法，不管多麼複雜的圖形，不管用多少種顏色，我們都可以將所有的塗色方法數計算出來，甚至我們可以將這樣的算法寫成電腦程式，讓電腦幫我們計算所有複雜的過程，這樣一來，面對「塗色問題」，我們就可以完全高枕無憂了。

黑斯廷斯戰役...在雙曲線上尋找格子點

◎許志農／台灣師範大學數學系

哈勒德二世國王的軍隊為防止強壯的諾曼軍冒險闖入他們的據點，哈勒德號令他的士兵們組成 61 個方陣隊形，而且每個方陣都有相同的人數。當哈勒德自己也加入這場戰爭時，所有的士兵們連同哈勒德國王便組成了一個更大的方陣，神聖的十字軍們大聲的高喊著：敵人滾出去！



這是西元 1066 年 10 月 14 日，發生在英國的一場很關鍵性的戰爭，但戰爭的若干細節，歷史學家們仍然覺得神秘且無法理解。「將 61 隊十字軍小方陣們，在加入哈勒德國王後組成大方陣」原是古代宗教編年史中的一小段從未被人注意過的故事。如果編年史的這段故事屬實的話，這將會是一道很有趣的算術問題，且讓我們來了解這道算術問題所隱藏的神秘且無法理解之處。

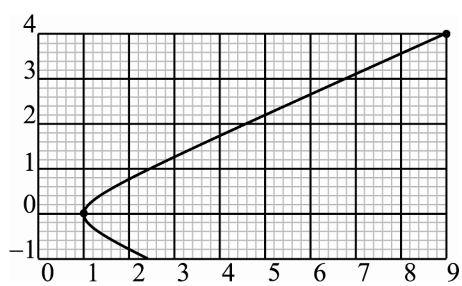
1 若當時哈勒德國王的 61 個方陣隊形中，每邊有 y 個士兵，而大方陣隊形每邊有 x 個士兵，則 x 與 y 所滿足的方程式為何？又哈勒德國王的軍隊人數為何？

歷史學家找到當時流傳的一首詩，記載著哈勒德國王當時站在軍隊的中央（Carmen de Bello Hastingensi），而那時的另一份文件也記載著他們的方陣軍隊像一座城堡，敵人很難攻破（Henry of Huntingdon）。從這兩個記錄中，我們可以確認這段故事（把小方陣重組成一個大方陣）的正確性是很高的。

根據當時的記錄，x 與 y 所滿足的方程式為

$$x^2-61y^2=1.$$

學過圓錐曲線的人都知道，這個方程式所代表的圖形是雙曲線。因為方陣每邊的人數 x 與 y 都是正整數，所以想要知道哈勒德國王的軍隊人數，就必須求該雙曲線在第一象限所通過的格子點。像這樣的問題，數學家稱為佩爾方程式求解問題。以比較簡單的例子 $x^2-5y^2=1$ 來說，除了 $(1,0)$ 之外，它所通過的下一個格子點為 $(9,4)$，如下圖所示：



讓我們回到哈勒德國王的方程式 $x^2-61y^2=1$，如果用筆計算或者按計算機，將發現很難按到剛好都是正整數的解。因為除了 $(1,0)$ 之外，這個雙曲線所通過的下一個格子點為 $(x,y)=(29718,3805)$（好大的數字）。讓我們來算算看，哈勒德國王的軍隊人數。根據題意，軍隊人數為

$$61y^2=61\times 3805^2=883159525.$$

這個數字顯示：哈勒德國王的軍隊人數接近 9 億，顯然不合理，這也是史學家不解的地方。

有一種猜測是這樣的：很可能 61 個方陣的軍隊是誤記，也許只有 60 個方陣的軍隊，這樣似乎比較合理。

從雙曲線 $x^2-61y^2=1$ 的圖形，我們很容易認為它的圖形近似一條直線往外延伸。事實上，它還不是一條直線，只是很快地貼近它的漸近線而已。既然雙曲線的圖形往外接近漸進直線，而直線上的格子點分布是很有規律的，我們可以理解到：雙曲線上的格子點分布可能也會有某種規律性的存在。事實上，這跟 $\sqrt{61}$ 的連分數有關，只是它不在我們討論的範圍。

專欄

動手玩數學

◎許志農／台灣師範大學數學系

遊戲 37 ☆☆☆

設 a, b 為正實數，且令

$$A = ab + \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}\ ;$$

$$B = b + \sqrt{a^2\left(1 + b^2\right) + 2aba}\ .$$

(1) 證明 $A = B$。

(2) 將

$$a = \sqrt{11 - 2\sqrt{29}}\ ;$$

$$b = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}}\ .$$

代入等式 $A = B$，並整理出相等的最簡恆等式。

〔玩鎖・玩索〕

整理出來的等式為

$$\sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}\ .$$

這是有名的尚克斯恆等式，這個恆等式起初是從迦羅瓦理論得來，後來人們發現等式兩邊的根數都是多項式方程式

$$x^4 - 54x^2 - 40x + 269 = 0$$

的根，又此方程式大於 7 的根僅有一個，所以兩個根式相等。這裡的題目是引導出第三種更妙的解題方式。

遊戲 38 ☆

工廠發生爆炸，聲響傳到 P, Q 兩村剛好差了 5 秒鐘。今以 P, Q 兩村為焦點，畫出通過工廠的雙曲線（只畫出通過工廠的那支）發現：此支雙曲線的頂點與 P 村的距離為 150 公尺。

已知聲音每秒可傳 340 公尺，求

(1) P, Q 兩村的距離。

(2) P, Q 兩村何者離工廠較近？

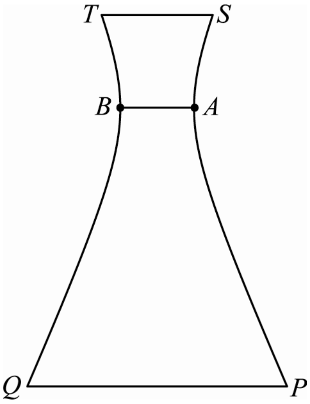
〔玩鎖・玩索〕

爆炸聲響傳播到不同的地方，所需時間不同，這是因為聲音每秒約能走 340 公尺左右。這項性質可以用來檢視爆炸地點，原因就在於雙曲線的定義與聲音的傳播差有很雷同的地方。中國大陸的雙曲線教材最喜歡用長短拉鍊來詮釋雙曲線的圖形及用爆炸聲響的傳播來當考題。

遊戲 39

☆☆☆☆

為了散熱效率，電廠冷卻塔的截面經常設計成雙曲線造型，下圖是某冷卻塔的截面圖，其頸部 AB 剛好是雙曲線的貫軸：



已知頸部 AB，頂部 ST 與底部 PQ 互相平行，$\overline{AB}=4$，$\overline{ST}=6$，$\overline{PQ}=14$，而且頸部 AB 與頂部 ST 相距 5，求頸部 AB 與底部 PQ 的距離。

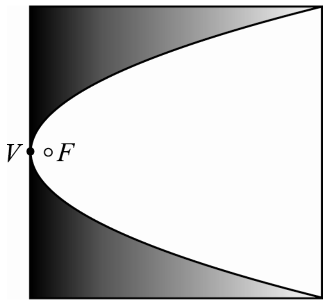
〔玩鎖・玩索〕

電廠冷卻塔大都蓋在河邊，目的就是為了汲水散熱。而雙曲線造型剛好是水流與散熱效果最棒的建築。原因是因為雙曲線有漸近線，水流就像在直線上流動一樣順暢。

遊戲 40

☆☆

在邊長為 6 的正方形內畫探照燈的平面圖，此探照燈的曲線是拋物線的一部分，而且拋物線的頂點 V 剛好落在正方形左邊的中點上，有經驗的師傅都會將燈泡安置在拋物線的焦點 F 上，如下圖所示：



問：應該將燈泡安置於離正方形左邊多少距離的位置？

〔玩鎖・玩索〕

手電筒的截面圖是由拋物線構成，而且燈泡安置於焦點位置，這是有數學根據的設置。物理學上的入射角與反射角一樣及拋物線的數學定義是手電筒設計的基本原理。

動手玩數學~破解秘笈 第9期

遊戲 33

(1) 還是第二名，你只是取代第二名的位置而已。

(2) 不會發生追過最後一名的情況。

玩鎖．玩索解答

(1) 四女兒就叫瑪莉。

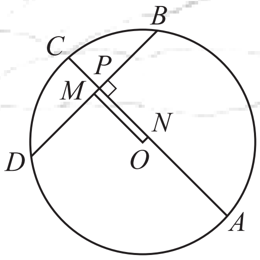
(2) 直接跟店主說：「我要買太陽眼鏡」就可以了，瞎子並沒有啞巴，可以說話。

遊戲 34

令 $\overline{PA}=a, \overline{PB}=b, \overline{PC}=c, \overline{PD}=d$ ，推得

圓心 O 至 $\overline{BD}$ 的距離為 $\overline{OM}=\overline{NP}=\dfrac{a-c}{2}$ ，

圓心 O 至 $\overline{AC}$ 的距離為 $\overline{ON}=\overline{MP}=\dfrac{d-b}{2}$ 。



(1) 利用畢氏定理，得

$$r^2=\overline{OD}^2=\overline{OM}^2+\overline{MD}^2$$
$$=\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+d}{2}\right)^2.$$

同理可得

$$r^2=\overline{OA}^2=\overline{ON}^2+\overline{NA}^2$$
$$=\left(\frac{d-b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2.$$

將兩式相加，得

$$4r^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2.$$

故 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=4r^2$ 是一個定值。

(2) 根據玩鎖．玩索的解釋，白色區域的披薩面積為 $\dfrac{1}{2}\left(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2\right)\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi r^2}{2}.$

灰色區域的披薩面積為 $\pi r^2-\dfrac{\pi r^2}{2}=\dfrac{\pi r^2}{2}$ 。

故白色與灰色區域的披薩面積相等，即披薩定理成立。

遊戲 35

設五隻大象的重量從小至大依序為 a, b, c, d, e，即 $a<b<c<d<e$。任兩隻大象的體重和會有十種不同的組合，而剛好有十種數據，也就是說，題意的十個數據是所有可能的組合數據。

又 $a+b$ 及 $a+c$ 是十種數據中較小的兩組，即

$$a+b=110, a+c=112.$$

同理，$d+e$ 及 $c+e$ 是十種數據中較大的兩組，即

$$d+e=121, c+e=120.$$

又十種組合的數據和剛好是五隻大象重量和的四倍，即 $4(a+b+c+d+e)$ 等於

$$\begin{aligned}&110+112+113+114+115\\&+116+117+118+120+121\\&=1156,\end{aligned}$$

整理得

$$a+b+c+d+e=289.$$

因為 $a+b+d+e=110+121=231$，

所以

$$\begin{aligned}c&=(a+b+c+d+e)-(a+b+d+e)\\&=289-231=58,\end{aligned}$$

代入 $d+e=121, c+e=120$，解得

$$e=62, d=59.$$

代入 $a+b=110, a+c=112$，解得

$$a=54, b=56.$$

故五隻大象的重量為

54, 56, 58, 59, 62（單位：石頭）.

遊戲 36

由給定的 19° 可以作出

$$2\cdot 19^\circ=38^\circ,$$

又 30° 可以作圖，所以 $38^\circ-30^\circ=8^\circ$ 可以作圖。將 8° 乘以 2 得 16° 可以作圖，再乘以 2 得 32° 可以作圖；將可以作圖的 32° 及 30° 相減，得

$$32^\circ-30^\circ=2^\circ$$

可以作圖。

最後將 2° 平分得到 1°。