龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

創刊號

許教授講故事

《師父中的師父講堂》
認識證明…頭腦的五種功能之一

升學報報：
台灣大學推甄試題與詳解

動手玩數學專欄

龍騰文化

編輯室墨記

對讀數論的人來說，擁有一本數論學家韋依（Andre Weil）所著的《數論》，算是基本的裝備，而且這本書在台灣也有翻版。讓我納悶的是，這本英文書籍的扉頁卻出現陳省身所題的「老馬識途」四個大字，並附上一匹駿馬的圖片。在讀完博士時，仍然搞不清楚其中原委與典故。在畢業教書之後，趁暑假來趟成都、西安之旅，才搞清楚整個情形，原來它是一段唐朝的大故事。

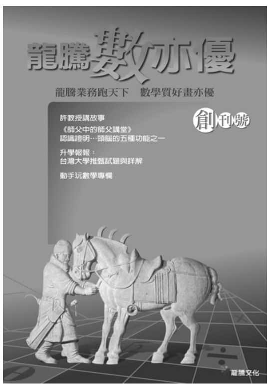
從四川成都搭乘火車翻越三國孔明六出祈山的秦領，出寶雞，來到曾經是秦王屬地的陝西西安。這趟懷古之旅，讓我既高興，又難過。高興的是可以與歷史相會，回憶一下我所瞭解的歷史，難過的是，經過一天多的搭車煎熬，還需忍受大陸乘客在車廂猛抽煙的煙味。大概是文革的關係，來接我們的陝西西北大學教授，竟然不知道五丈原這個地方（孔明在那過逝，位於秦嶺出陝西的地方），對武則天的歷史也知道很少，這是讓我很訝異的地方。不過，在陝西西安碑林博物館，讓我心中的疑問頓解，可說是此行最大的收穫。就讓我來報告這趟豐收之旅吧！

唐太宗昭陵上，有六匹駿馬的浮雕石刻聞名於世，俗稱昭陵六駿（白蹄烏、青騅、颯露紫、拳毛騧、特勤驃、什伐赤）。這六匹戰馬是李世民在唐開國戰爭中南征北討的坐騎，並命唐初大畫家閻本立繪草圖，監石雕而成，因而有

「秦王鐵騎取天下　六駿功高畫亦優」

這樣的詩句流傳於世。這六匹馬中的颯露紫與拳毛騧於1914年被盜，運往美國，現藏於美國費城賓夕法尼亞大學博物館，牠們的複製品與其餘四匹駿馬的真品陳列於西安碑林博物館。數學家陳省身有感於古物流落他鄉的遺憾，特在偉大數論學家韋依所著的《數論》這本書的扉頁上，用毛筆書寫著「老馬識途」四個中文字，並附上拳毛騧的圖片，渴望牠們早日回歸故里。

唐太宗懷戀的這六駿，有的在箭雨中穿行，帶傷而馳；有的跨河飛奔，越野而去；有的緩步慢行，若有所思。閻本立所草繪的六匹駿馬中，三匹作騰蹄飛奔之狀；三匹爲站立徐行的姿勢；有些馬則身中數箭，甚至有一幅是描述邱行恭武將替太宗的一匹愛馬拔箭的情景（封面圖）。而石雕部分，雕造技巧純熟，刀法洗鍊簡潔。馬的身軀各部分結構，雕刻得尤其嚴格準確。鞍飾許多局部變化，雕刻得細緻精湛而不瑣碎，成爲唐代雕刻精品。



發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：吳淑芬
副總編輯：孫慧璟
執行編輯：莊莉錚
美術編輯：林儀婷

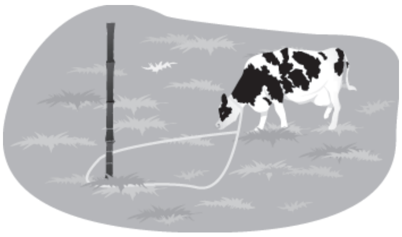
發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248台北縣五股鄉五權七路1號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2299-9069
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2006/11/30
網　　址：http://www.lungteng.com.tw

目次 CONTENTS

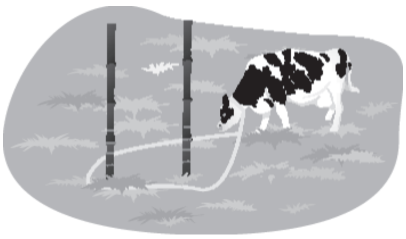
許教授講故事 STORY

◎許志農／國立台灣師範大學數學系

今年師大開學延後一週上課，原因是宿舍整修工程從暑假到開學前一直無法如期完工，導致學生無宿舍可住。在學校理髮室剪頭髮是我的習慣，理髮師手藝不是很好，理個勉強的頭髮，理髮師也不覺得愧疚，我也可以接受。我在理髮、洗頭、吹乾後，兩側頭髮會翹得有一點高，少有理髮師可以處理得好，大都事後說「你的頭髮太粗，才會翹起來，不是我的技術不好。」也因為這樣，我很少在理髮店洗頭，大都回家自己洗，以免增加理髮師的愧疚感。



〈圖一〉



〈圖二〉

趁著暑假以來，師大理髮室暫停營業的空檔，換個理髮的地方，我選了離我家很近的一所高中所附設的理髮室。理髮師三十出頭，職校美容科畢業，這次不僅理髮，也在那兒洗髮，心想美容科畢業，我的頭髮一定難不倒她。沒想到洗頭、吹乾後，兩側的頭髮還是翹起來，更令我意外的是，理髮師講了如下的話讓我寬心，也順便撇清責任，她說：「說你頭髮粗，導致洗髮後兩側微翹的理髮師是髮藝不精，理論沒搞懂，瞎掰推卸責任的。事實上，你的頭髮不粗，還很細。原因出在剛出生的小時候……，人的頭像西瓜一樣，可能比較像小玉，是對稱的球形，頭頂有個漩渦，頭髮就繞著這漩渦，以60度的角度下垂，貼在頭皮上。今天你的兩側頭髮會翹起來是因為小時候你是一個「乖寶寶」的關係。乖寶寶會乖乖的躺在嬰兒床睡覺，就像很久沒開動的汽車輪胎一樣，輪胎會變成橢圓的形狀，後腦會變得扁平，此時兩側被壓擠，頭髮下垂的角度被改變，所以兩側頭髮會稍微翹起來。這是乖寶寶的報應，小時候滾來滾去的嬰兒，長大後頭會是球形的，就不會有這個問題。」聽她這樣分析，學數學的我也只好付錢摸摸鼻子走人。沒想到理個頭髮也可以衍生出這樣的數學問題，似乎職校學生的數學能力也沒有我們想像的差。

說到圓與球，就讓我回想起好幾年前在桃園評科展的一段往事。有一組學生研究「牛可以吃到草的區域面積問題」，這問題跟綁牛的繩子如何套繞住牛及所綁物體的形狀有關。最淺顯的情形就是〈圖一〉的情況，牛所能吃到草的區域是個圓及其內部。但是，如果怕牛破壞一根竹竿走丟，為了保險起見，將牠套在兩根竹竿上，如〈圖二〉所示，這時牛所能吃到草的區域形狀似乎比較複雜了。不過，中學所學過的圓錐曲線應該可以幫得上忙。

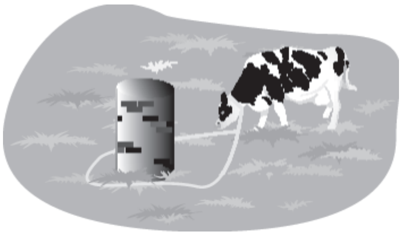
1 設圖一、二中，套住牛的繩長都是 $2r$，而且圖二中兩根竹竿相距小於 r。討論下列問題：

(1) 利用初等幾何方法想想看，在圖一或圖二的牛中，何者可吃到草的範圍面積較大？

(2) 圖二的牛可吃到草的區域之形狀為何？試說明之。

(3) 已知長軸 $2a$，短軸 $2b$ 的橢圓之面積公式為 πab，利用此面積公式推論：圖一或圖二的牛，何者可吃到草的範圍面積較大。

如果將套牛的竹竿變成橢圓形的石柱，如下圖所示，那麼牛可以吃到草的區域形狀又為何呢？



這是口試那組學生時，忽然從腦海裡湧出的一道難題。學生們想了一下，順口回答「是橢圓」。問題是，真的是橢圓嗎？

研究1 上圖中，將牛套在橢圓石柱上，牛可以吃到草的區域形狀是橢圓形嗎？

師父中的師父講堂第四講

認識證明……頭腦的五種功能之一

◎許志農／國立台灣師範大學數學系

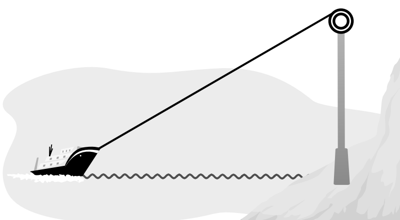
數學經文

正確的知識、錯誤的知識、想像、睡覺和記憶是頭腦的五種能力。頭腦本身既非敵人，亦非朋友，你可以使它成為朋友，你也可以使它成為敵人，它依你而定，依那個隱藏在頭腦背後的你而定。

記憶就是過去經驗的喚起，對過去的事情，採取真實而正確的記憶是避免重複犯錯的不二法門。

唯有讓頭腦處在正確知識裡，潛意識的直覺（第六感）才會是正確的；意識的推論才會是合乎邏輯的。得到這兩個福報就好像隨身攜帶了火把，無論思緒移動到哪裡，那個黑暗就立刻消失，所到之處都是明亮的，所有的事情都不證自明了。

問題 如下圖所示，滑輪拖著輪船，讓船靠近岸邊。



問：滑輪捲動的繩子長度與輪船前進的距離何者較大？請證明之。

當人的頭腦處在正確知識中心時，「直覺、直接的認知」和「合乎邏輯的推論」就是辯證時，獲得知識的兩大來源。這兩個來源（直覺、直接的認知與合乎邏輯的推論）構成了數學證明的詩篇。想要讓直接的感應產生，合乎邏輯的推論出現，必須讓頭腦變成「證明」的朋友，也就是讓頭腦處於正確知識裡。唯有讓頭腦處在正確知識中，直覺、直接的認知才會像井水般源源不斷的流出，合乎邏輯的推論才會像泉水般一波接著一波的湧現。

讓頭腦儲存或擁有越多數學知識的記憶，使頭腦處在正確知識裡：充足的數學知識，直覺、直接的認知加上合乎邏輯的推論讓我們對數學證明充滿信心。現在就讓我們的頭腦處在正確的知識中心裡！

① 三角形的不等式

當你欲從 A 地走到 B 地時，心裡清楚選擇兩地間的直線來走最短，而不會選擇弧線或彎曲的路徑前往。這是因為三角形的不等式這粒種子，不僅早已播種在你的腦海裡，還長出了芽，甚至開了花、結了果。但是偶而還是會忘記它的存在，特別是在沒有知覺的情境之下。

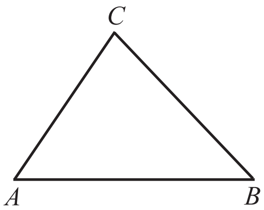
① 直角坐標平面的不等式：

在〈圖一〉的三角形 ABC 中，邊長 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 滿足「兩邊之和大於第三邊」與「兩邊的差小於第三邊」的三角形不等式，也就是

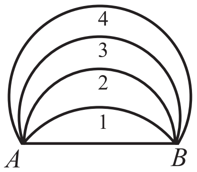
$$\overline{AC}+\overline{BC}>\overline{AB} \quad \text{與} \quad \left|\overline{AC}-\overline{BC}\right|<\overline{AB}.$$

② 地球表面的不等式：

在〈圖二〉中，設 A, B 是地球上的兩個點，顯然圓弧 1 的半徑＞圓弧 2 的半徑＞圓弧 3 的半徑＞圓弧 4 的半徑，但是圓弧 1 的長度＜圓弧 2 的長度＜圓弧 3 的長度＜圓弧 4 的長度。也就是說，走半徑最大的圓弧，經過的路徑最短（這是因為半徑越大，其圓弧越接近直線）。因此，飛機從 A 飛到 B 時，經常選擇地球的大圓來飛行，這樣最節省時間。

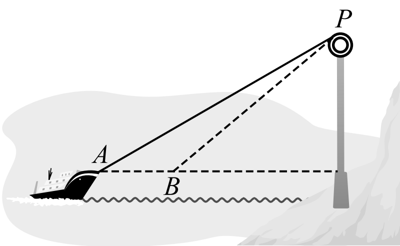


〈圖一〉



〈圖二〉

接下來就讓我們利用三角形的不等式來解決本節的問題：如下圖所示



滑輪捲動的繩子長度為

$$|\overline{PA}-\overline{PB}|;$$

而輪船前進的距離為

$$\overline{AB}.$$

由三角形 PAB 的三角形不等式知道

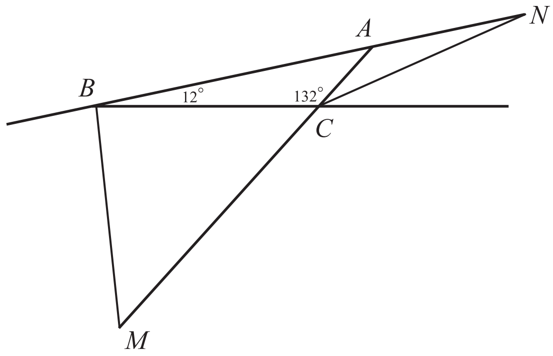
$$|\overline{PA}-\overline{PB}|<\overline{AB},$$

即滑輪捲動的繩子長度＜輪船前進的距離。

② 平面幾何證明……最好的邏輯推理訓練

讓頭腦的推論合乎邏輯最簡單的訓練或檢驗方式就是從事平面幾何證明：

例題 1 如下圖所示：



設 $\overline{BM}$ 與 $\overline{CN}$ 是三角形 ABC 的外角分角線。

證明 $\overline{BM}=\overline{CN}$ 。

〔證〕

因為

$$\angle CBM=\frac{180°-12°}{2}=84°,$$

$$\angle BCM=180°-132°=48°,$$

所以

$$\angle BMC=180°-84°-48°=48°,$$

因此三角形 BMC 是等腰三角形，即 $\overline{BM}=\overline{BC}$ 。

因為

$$\angle ACN=\frac{180°-132°}{2}=24°,$$

$$\angle BAC=180°-132°-12°=36°,$$

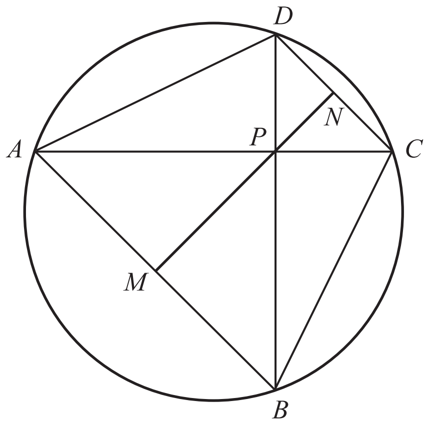
所以

$$\angle BNC=36°-24°=12°,$$

因此三角形 BNC 是等腰三角形，即 $\overline{BC}=\overline{CN}$ 。

綜合得到 $\overline{BM}=\overline{BC}=\overline{CN}$ 。

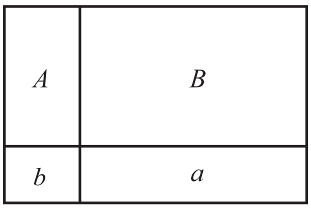
練習 1 如下圖所示：



圓內接四邊形 $ABCD$ 的對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直，且相交於 P 點。若 N 在 $\overline{CD}$ 上，$\overline{MN}$ 通過 P 點，且與 $\overline{AB}$ 垂直，則證明 $\overline{CN}=\overline{DN}$ 。

3 矩形分割

例題 2 如下圖所示：



利用鉛直線與水平線可將矩形分割成面積依序為 A, a, B, b 的四個小矩形。該如何畫鉛直線與水平線，才能使其滿足下列條件。

① 在何條件下，A, a, B, b 會滿足

$$a+A=b+B.$$

② 在何條件下，A, a, B, b 會滿足

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}.$$

③ 在何條件下，A, a, B, b 會滿足

$$A-a=B-b.$$

④ 在何條件下，A, a, B, b 會滿足

$$aA=bB.$$

〔證〕

令大矩形的長被鉛直線分成長度為 p 與 q 的兩個線段；寬被水平線分成長度為 r 與 s 的兩個線段。此時

$$A=pr,\ a=qs,\ B=qr,\ b=ps.$$

① 由題意知

$$\begin{aligned}&qs+pr=ps+qr\\ \Rightarrow\ &q(s-r)=p(s-r)\\ \Rightarrow\ &(p-q)(s-r)=0\\ \Rightarrow\ &p-q=0\ \text{ 或 }\ s-r=0\\ \Rightarrow\ &p=q\ \text{ 或 }\ s=r.\end{aligned}$$

故當鉛直線或水平線平分大矩形面積時，等式

$$a+A=b+B.$$

成立。

② 由題意知

$$\begin{aligned}\frac{pr}{qs}=\frac{qr}{ps}\ &\Rightarrow\ q^2=p^2\\ &\Rightarrow\ (q+p)(q-p)=0\\ &\Rightarrow\ q=p.\end{aligned}$$

故當鉛直線平分大矩形面積時，等式

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$$

成立。

③ 由題意知

$$\begin{aligned}pr-qs=qr-ps\ &\Rightarrow\ p(s+r)=q(s+r)\\ &\Rightarrow\ p=q.\end{aligned}$$

故當鉛直線平分大矩形面積時，等式

$$A-a=B-b.$$

成立。

④ 由題意知

$$qs\cdot pr=ps\cdot qr\ \Rightarrow\ 1=1.$$

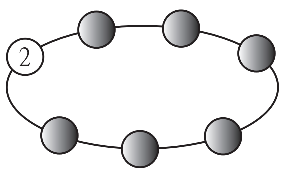
故無論鉛直線或水平線為何，等式

$$aA=bB$$

恆成立。

4 奧修的念珠

例題 3 奧修的念珠是由七顆精選的寶石串起來的，其中標示 2 的那顆寶石的重量為 2 克拉。



為了某種目的，這串念珠每顆寶石的重量必須是其左、右兩顆相鄰寶石重量的幾何平均數。試求這串念珠其餘六顆寶石的重量。

〔證〕

令七顆寶石重量最輕者為 w 克拉，而在最輕者左、右兩顆相鄰寶石重量分別為 a 與 b 克拉。由此假設知道

$$w \le a, w \le b, w = \sqrt{ab}.$$

① 如果 $w < a$ ，則 $w^2 < ab$ ，即 $w < \sqrt{ab}$ ，與 $w = \sqrt{ab}$ 矛盾。

② 如果 $w < b$ ，則 $w^2 < ab$ ，即 $w < \sqrt{ab}$ ，與 $w = \sqrt{ab}$ 矛盾。

因此 $w = a, w = b$ ，即最輕者左、右兩顆相鄰寶石重量與最輕者同重。

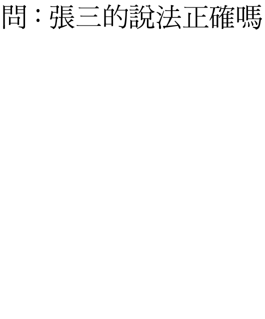
同法可得，所有的寶石都是相同的重量。故每顆寶石的重量都是 2 克拉。

練習2 若奧修的念珠是符合「每顆寶石的重量必須是其左、右兩顆相鄰寶石重量的算術平均數」這個條件，則求這串念珠其餘六顆寶石的重量。

有了這兩道問題的證明經驗之後，接下來請你解決台大推甄的一道問題：

練習3 在無窮的平面網格上(由無窮多水平線與垂直線所形成)，每一格之內放置一個自然數（可重複)，使其每一格的數都等於其相鄰上下左右四格的平均值，即

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$



張三說：要完成這樣的配置，必須每一格放置相同的正整數。請問：張三的說法正確嗎？請說出你的論證。

⑤ 數的觀察

你知道恆等式

$$4 = n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2$$

有多美嗎？當你可以用它來解決下一道例題的時候，你就可以領悟它的漂亮！

例題4 如下表所列：

$$\begin{aligned}
1 &= 1^2; \\
2 &= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2; \\
3 &= -1^2 + 2^2; \\
4 &= -1^2 - 2^2 + 3^2; \\
5 &= 1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2.
\end{aligned}$$

正整數1, 2, 3, 4, 5 都可以寫成從 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots$ 等依序開始的若干個平方和（可以放正負符號修正）。是否每個正整數都可以這樣做。可以的話，證明之；不能的話，舉一個反例。

〔證〕

利用恆等式

$$4 = n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2$$

可以證明：任意正整數都可以。例如

$$\begin{aligned}
6 &= 2 + 4 \\
&= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) \\
&= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2;
\end{aligned}$$

依樣畫葫蘆，可知

$$\begin{aligned}
9 &= 5 + 4 \\
&= 1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + (6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2) \\
&= 1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2.
\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}
9 &= 1 + 4 + 4 \\
&= 1^2 + (2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2) + (6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2) \\
&= 1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 - 8^2 + 9^2.
\end{aligned}$$

仿照此方法及1, 2, 3, 4 可以表成連續平方數的正負和，知道任何正整數都可以表成連續平方數的正負和。

⑥ 直接證法是畫家，反證法則是雕刻師

米開朗基羅正在做一座耶穌的塑像，有人跟他說「你的創造是偉大的」。他說「我什麼也沒有做。耶穌藏在這塊大理石裡面，我只是幫助他被釋放出來。他已經在那兒了，只是有超過了需要的大理石。有無關緊要的……我把那無關緊要的鑿去。我只是發現了他，我沒有創造他」。

畫家直接畫出人像或物體，就像直接推論出要證明的結果一樣，但是雕刻師傅採取相反的策略，他只是把不必要的大理石鑿開而已，就像去除所有錯誤的選項，正確的推論就呼之欲出了。因此直接證法由畫家來擔綱，而反證法就委託雕刻師傅演出了。

例題 5 證明 $\sqrt{2}$ 是無理數。

在這裡提供兩種證明方法，它們都是反證法。假設 $\sqrt{2}$ 是有理數（不是無理數），每個有理數都有很多種不同的表示法，

例如

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\cdots,$$

但是分母最小的表示法只有一個，而且分母最小的表示法會使分子與分母互質。故有理數 $\sqrt{2}$ 有下列兩種不同的說法（表示法）：

〔證 1〕令

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p},$$

其中 p, q 是互質的正整數。將兩邊平方得到

$$2=\frac{q^2}{p^2}\Rightarrow 2p^2=q^2.$$

由整數分解性質得 $2\mid q$ ，令 $q=2r$ ，代入得到

$$2p^2=(2r)^2\Rightarrow 2r^2=p^2.$$

同法可得 $2\mid p$ 。

因此 2 是 p 與 q 的公因數，此與 p, q 互質矛盾。故「假設 $\sqrt{2}$ 是有理數」是錯誤的，即 $\sqrt{2}$ 是無理數。

〔證 2〕令

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p},$$

其中 p, q 為正整數，且 $\frac{q}{p}$ 是分母 p 值最小的表示法。因為 $1<\sqrt{2}<2$ ，所以 $1<\frac{q}{p}<2$ ，即

$$p<q<2p.$$

由

$$\begin{aligned}\sqrt{2}=\frac{q}{p}&\Rightarrow 2p^2=q^2\\&\Rightarrow 2(q-p)^2=(q-2p)^2\\&\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{2p-q}{q-p}.\end{aligned}$$

在表示法 $\sqrt{2}=\frac{2p-q}{q-p}$ 中，分母 $q-p$ 滿足

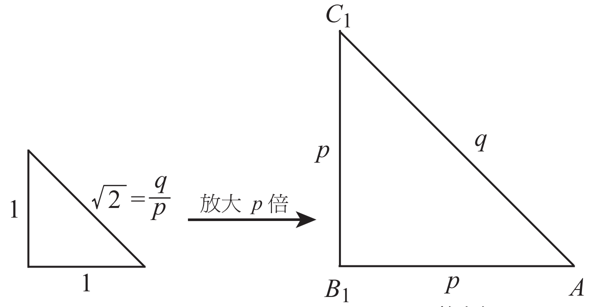
$$0<q-p<p\ (\text{因爲 } p<q<2p).$$

這與 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ 是表示法中分母 p 值最小的矛盾。故「假設 $\sqrt{2}$ 是有理數」是錯誤的，即 $\sqrt{2}$ 是無理數。

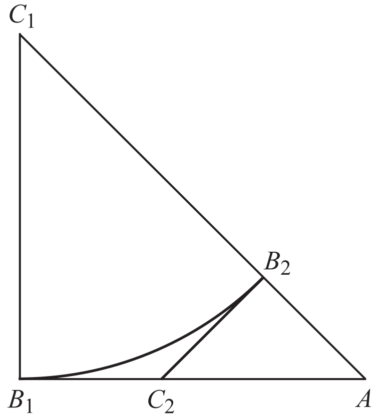
練習 4 如果直接證法由畫家來擔綱，反證法委託雕刻師傅演出，那麼數學歸納法請誰客串呢？如果你百思不得其解，可以翻到本章最後一頁的附圖，希望它能給你靈感。

⑦ $\sqrt{2}$ 不是分數的再次證明……費馬無窮遞降法

數學問題的證明方法除了「直接證法」、「反證法」與「數學歸納法」外，還有一種叫做「費馬無窮遞降法」的證明方法。我們就以「$\sqrt{2}$ 不是分數」這道數學問題為藍本，讓你體會何謂「費馬無窮遞降法」。首先，還是假設 $\sqrt{2}$ 是分數，並令 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ ，此時可以將邊長 $1, 1, \sqrt{2}=\frac{q}{p}$ 的等腰直角三角形放大 p 倍，得到一個邊長都是正整數 p, p, q 的等腰直角三角形 AB_1C_1（如下圖所示）：



現在以 C_1 為圓心，$\overline{C_1B_1}$ 為半徑，畫一圓交線段 $\overline{C_1A}$ 於 B_2；過 B_2 作該圓切線與 $\overline{AB_1}$ 相交於 C_2。



三角形 AB_2C_2 有如下的性質：

① 因為 $\angle A = 45^\circ$，$\overline{C_2B_2}$ 與 $\overline{AC_1}$ 垂直，所以三角形 AB_2C_2 是等腰直角三角形，$\angle AB_2C_2$ 是直角，且 $\angle B_2AC_2 = \angle B_2C_2A = 45^\circ$。

② 因為 $\overline{B_2A} = \overline{C_1A} - \overline{C_1B_2} = q - p$，
$\overline{B_2A} = \overline{B_2C_2} = \overline{B_1C_2}$，所以
$\overline{B_1C_2} = \overline{B_2C_2} = \overline{B_2A} = q - p$ 都是正整數。

③ 因為 $\overline{AC_2} = \overline{AB_1} - \overline{B_1C_2} = p - (q-p) = 2p - q$，所以 $\overline{AC_2}$ 也是正整數。

綜合得到：三角形 AB_2C_2 也是一個邊長都是正整數的等腰直角三角形，但是顯然它的斜邊 $\overline{AC_2}$ 比三角形 AB_1C_1 的斜邊 $\overline{AC_1}$ 要短。同樣的方法，可以得到邊長都是正整數的等腰直角三角形

$$AB_3C_3,\ AB_4C_4,\ AB_5C_5, \cdots,$$

而且斜邊

$$\overline{AC_1} > \overline{AC_2} > \overline{AC_3} > \overline{AC_4} > \cdots.$$

因為斜邊都是正整數，所以不可能一直小下去，因此產生了矛盾。故原先假設「$\sqrt{2}$ 是分數」是錯誤的，$\sqrt{2}$ 不可能是分數，應該是無理數。

如果你領悟了「費馬無窮遞降法」的奧妙，將發現「費馬無窮遞降法」與「數學歸納法」是走相反的方向，數學歸納法從最小的正整數1檢驗起，逐步往大的正整數推，最後證明所有的正整數都成立；而費馬無窮遞降法卻從某個大的正整數做起，逐步往小的正整數導，最後得到矛盾。因此，「費馬無窮遞降法」與「數學歸納法」實質上是相同東西的兩面。

練習5 試著模仿上述費馬無窮遞降法，證明 $\sqrt{5}$ 不是分數。

練習6 證明以 $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ 為內角的等腰三角形之邊長不可能都是正整數。

8 讓頭腦處在真實而正確的記憶中

記憶就是頭腦對過去經驗的喚起，它也是頭腦的五種功能之一。對過去事情採取真實而正確的記憶是很重要的，不要試圖去美化或者醜化過去所做事情的記憶。

舉例來說，學生經常在考完試之後，悔恨的說「為什麼沒想到這個，沒想到那個」之類的話，他在意的是分數的沒辦法多一點，而不是對剛剛考試過程的正確記憶。事實上，是因為他處在錯誤的知識中心，才導致沒想到這個，沒想到那個。他必須對這件事情做真實而正確的記憶，才能在下一次避免犯同樣的錯誤。如果他試圖以安慰自己的方式，美化自己的記憶（如將它解釋成不小心，一時糊塗或粗心大意），甚至把別人做對的事情醜化成別人的僥倖，那麼他將一再地犯同樣的這個錯誤。

再舉一例，在數學考試中，有關選擇題或填充題的部分，有時因為出題不夠慎重的關係，導致可以用特例來解題。很多學生養成靠特例解題取得分數，反而忽略了真正的解法。每次考試後，在學生心中，只有特例解題，美化分數的記憶，卻對不知如何正確解題的記憶忽略，甚至也沒在考試後，去追求真正的作法。這只會導致同樣的事情一再發生，數學能力反而提升不易。

美化自己與醜化別人是頭腦最容易犯的一種錯誤，那是一種錯誤的記憶。正確的記憶應該是對過去的事情不做任何判斷，且真實正確的記下來就可以了。這看似簡單，卻是很難做到，因為頭腦總是喜歡將過去自己做不好的事美化，將別人做得不錯的事給予醜化。

前三講請參閱數學新天地第11～13期

國立台灣大學數學系 95 學年度 學士班甄選入學

第二階段筆試試題

2006/4/1　上午 9：00~11：00

1. 設 $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n}$，其中 $a_0, a_1, \cdots$ 為係數。證

$$a_0 + a_3 + a_6 + \cdots = a_1 + a_4 + a_7 + \cdots = a_2 + a_5 + a_8 + \cdots = 3^{n-1}.$$

2. 設 $O(0\,,0)$, $A(0\,,6)$, $B(5\,,10)$, $P(-15\,,0)$ 為 $xy-$ 平面上之四點。若 L 為過點 P 之直線，

   且 L 將 $\triangle\, OAB$ 分成面積相等之兩部分，求 L 之方程式。

3. 以剪刀、石頭、布猜拳。

   (a) 若兩人猜，平均要猜幾次才分勝負。

   (b) 現有三人一起猜拳（三人一起出拳）。若兩人勝一人，則勝者兩人繼續猜。若一人勝兩人，此人勝出。問平均要猜幾次，才能剛好有一人勝出。

4. 設 A 為 3×3 之方陣。對任何 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ 均有 $|A\vec{a} \times A\vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$。

   (1) 設 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ 互相垂直且長度為 1。證明 $A\vec{u} \times A\vec{v}$, $A\vec{u} \times A\vec{w}$ 也是互相垂直且長度為 1。

   (2) 證明：$|A\vec{a}| = |\vec{a}|$ 對所有 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 均成立。

國立台灣大學數學系 95 學年度 學士班甄選入學

第二階段筆試試題

1. 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，顯然 ω 滿足

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0.$$

將

$$f(x)=(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$$

的 x 分別代 $1,\omega$ 及 ω^2，得

$$\begin{aligned}
3^n&=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{2n} && ①\\
0&=a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+a_3+a_4\omega+a_5\omega^2+\cdots+a_{2n}\omega^{2n} && ②\\
0&=a_0+a_1\omega^2+a_2\omega+a_3+a_4\omega^2+a_5\omega+\cdots+a_{2n}\omega^{n} && ③
\end{aligned}$$

由①＋②＋③得

$$3^n=3(a_0+a_3+a_6+\cdots)\Rightarrow a_0+a_3+a_6+\cdots=3^{n-1}.$$

再由①+②ω^2+③ω得

$$3^n=3(a_1+a_4+a_7+\cdots)\Rightarrow a_1+a_4+a_7+\cdots=3^{n-1}.$$

最後由①+②ω+③ω^2得

$$3^n=3(a_2+a_5+a_8+\cdots)\Rightarrow a_2+a_5+a_8+\cdots=3^{n-1}.$$

2. 因為直線 L 過 $P(-15,0)$，所以直線 L 的 x 截距 -15，令其 y 截距 $b(b>0)$。根據截距式，得直線 L 的方程式為

$$L{:}\ \frac{x}{-15}+\frac{y}{b}=1.$$

直線 BO 的方程式為 $y=2x$，與直線 L 的交點坐標為 $C\left(\dfrac{15b}{30-b},\dfrac{30b}{30-b}\right)$，又直線 L 與 y 軸的交點為 $D(0,b)$。因此，三角形 OCD 的面積為

$$\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{15b}{30-b}=\frac{15b^2}{2(30-b)},$$

而三角形 OAB 的面積為

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=15.$$

根據題意

$$\frac{15b^2}{2(30-b)}=\frac{15}{2}\Rightarrow b^2+b-30=0,$$

解得 $b=5,-6$（不合）。故直線 L 的方程式為

$$\frac{x}{-15}+\frac{y}{5}=1\Rightarrow x-3y+15=0.$$

3. (a) 機率問題必須先求出樣本空間，兩人猜拳的樣本空間可以用序對表示，序對的第一位置代表一人出拳情形，第二位置代表另一人出拳狀況。因此，會有（剪刀，剪刀），（剪刀，石頭），（剪刀，布），（石頭，剪刀），（石頭，石頭），（石頭，布），（布，剪刀），（布，石頭），（布，布）等 9 種情形。所以平手有 3 種，分出勝負有 6 種，即猜一次拳平手的機率 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，而分出勝負的機率 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$。

由上述分析，得猜 n 次拳才分出勝負的機率，即前 $n-1$ 次平手，第 n 次分出勝負的機率，為

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right).$$

因此，兩人猜拳分出勝負的期望次數為

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}.$$

又

$$3S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^{n-1}}.$$

將後式減去前式，得

$$2S=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=2+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=3.$$

故兩人猜拳，平均要猜1.5 次才分勝負。

(b) 如(a)的解答，可以將三人一起猜拳（三人一起出拳）的樣本空間表成三個位置的序對。將樣本空間列出，共有 $3^3=27$ 種，其中兩人勝一人有 9 種，一人勝兩人有 9 種，而平手有 9 種，即兩人勝一人，一人勝兩人，平手的機率都是 $\frac{1}{3}$。現在分成兩種情形討論：

(1) 前$n-1$次平手，第n次一人勝兩人的機率為

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

這種情況的期望值為

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n}}.$$

(2) 前$n-1$次平手，第n次兩人勝一人的機率為

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

接下來剩兩人猜拳，根據遊戲知道期望值為1.5。這種情況的期望值為

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1.5)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1.5}{3^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n}}+\frac{3}{4}.$$

故三人一起猜拳，平均要猜

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n}}+\frac{3}{4}=1.5+0.75=2.25.$$

次，才剛好有一人勝出。

4. 這道題目考學生對外積的認識，雖然外積不是課程綱要要求教授的內容，但是有時解題比較快。數學不錯的同學不妨認識外積，對將來是有所幫助的。外積最重要的一個性質是：

① 向量$\vec{a}$與$\vec{b}$的外積$\vec{a}\times\vec{b}$與向量$\vec{a}$與$\vec{b}$都垂直，而且其長度$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$剛好就是向量$\vec{a}$與$\vec{b}$所張平行四邊形的面積。

② $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}.$

感謝嘉義高中陳勇政老師提供本問題的解析。

(1) 因為$\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$互相垂直且長度為$1$，所以$\vec{u}\times\vec{v}\,//\,\vec{w}$，而且$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=1$。同理

$$\left|\vec{u}\times\vec{w}\right|=\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|=1.$$

也就是說，$\vec{u}\times\vec{v},\vec{u}\times\vec{w}$及$\vec{v}\times\vec{w}$三向量互相垂直且長度都是$1$。由題意$\left|A\vec{a}\times A\vec{b}\right|=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$得

$$\left|A\vec{u}\times A\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=1,$$

同理

$$\left|A\vec{u}\times A\vec{w}\right|=\left|A\vec{v}\times A\vec{w}\right|=1.$$

也就是 $A\vec{u}\times A\vec{v}, A\vec{u}\times A\vec{w}$ 及 $A\vec{v}\times A\vec{w}$ 的長度都是 1 。現在證明它們互相垂直，將等號

$$\left|A\vec{u}\times\left(A\vec{v}+A\vec{w}\right)\right|^2=\left|\vec{u}\times\left(\vec{v}+\vec{w}\right)\right|^2$$

兩邊分別用內積展開得

$$\begin{aligned}\text{左式}&=\left(A\vec{u}\times A\vec{v}+A\vec{u}\times A\vec{w}\right)\cdot\left(A\vec{u}\times A\vec{v}+A\vec{u}\times A\vec{w}\right)\\&=\left|A\vec{u}\times A\vec{v}\right|^2+2\left(A\vec{u}\times A\vec{v}\right)\cdot\left(A\vec{u}\times A\vec{w}\right)+\left|A\vec{u}\times A\vec{w}\right|^2\\&=2+2\left(A\vec{u}\times A\vec{v}\right)\cdot\left(A\vec{u}\times A\vec{w}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右式}&=\left(\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}\right)\cdot\left(\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}\right)\\&=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|^2+2\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)+\left|\vec{u}\times\vec{w}\right|^2\\&=2+2\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)\\&=2+0=2,\end{aligned}$$

即 $\left(A\vec{u}\times A\vec{v}\right)\cdot\left(A\vec{u}\times A\vec{w}\right)=0$ ，故 $A\vec{u}\times A\vec{v}$ 與 $A\vec{u}\times A\vec{w}$ 垂直，故 $A\vec{u}\times A\vec{v}, A\vec{u}\times A\vec{w}$ 及 $A\vec{v}\times A\vec{w}$ 的長度都是 1 ，而且互相垂直。

(2) 設 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\in\mathbb{R}^3$ 互相垂直且長度為 1 的一組向量。對任意向量 $\vec{a}$ 都可以表為

$$\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}.$$

利用 $A\vec{v}\times A\vec{w}$ 的長度都是 1 ，而且互相垂直，得

$$\begin{aligned}\left|A\vec{a}\right|^2&=\left|xA\vec{u}+yA\vec{v}+zA\vec{w}\right|^2\\&=x^2+y^2+z^2.\end{aligned}$$

同理可得

$$\left|\vec{a}\right|^2=\left|x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}\right|^2=x^2+y^2+z^2.$$

故 $\left|A\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|.$

專欄

動手玩數學

◎許志農／國立台灣師範大學數學系

〈動手玩數學〉專欄的每道題目是根據高中數學的某章節的數學概念為題，所精心設計出來的新穎數學趣題。題目以「靈活而不難、巧妙而不偏、美麗而不怪」為主，又注重啟發性，寓數學於趣味與娛樂之中。有時也會安排幾題國三升高一的銜接題，或加深重要數學觀念的遊戲題。在這專欄中，每道題目的難度用顆星☆來呈現，從一顆星☆的入門題到五顆星☆☆☆☆☆的思考題都有。而每道題目的左側是達文西人體比例圖做題開端，圖下方是這道問題的顆星數。接下來有〔玩鎖・玩索〕，是對題目的歷史背景做介紹，或對解題的方法提供提示，或者對所需的數學資料做溯源與整理的工作（包含擴張與延伸）。最後則是解答，為了讓老師或學生真正的動手玩數學，解答不附在本書裡，而是放在龍騰文化全球資訊網。

本專欄的題目儘可能以自然科學資訊當背景、人文素養為材料、社會典故做情境，集結這三種模型開創高中數學問題的另一個平台。讀者如果有興趣或想要給學生做更多的練習題，可以到本人《師父中的師父》網站的〈動手玩數學〉欄下載，網址如下：

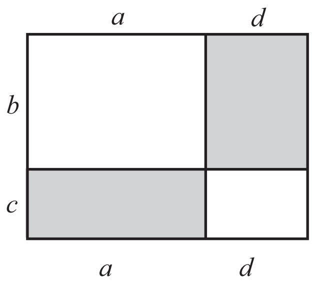
http://math.ntnu.edu.tw/～maco/play.htm

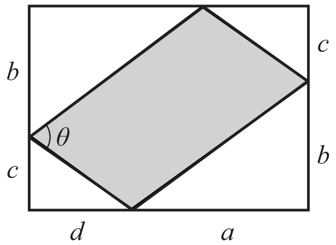
就讓我們進入〈動手玩數學〉的第一集：

遊戲 1

☆

國外很流行將數學公式或不等式用簡單、有創意且易於了解的幾何圖形來呈現，這就是所謂「無字證明」或叫做「圖說一體、不證自明」。下圖是臺北市中山女中的林怡萱學生，針對柯西不等式所提出的「無字證明」：





(1) 說明上圖中的白色區域面積等於下圖中的白色區域面積。

(2) 將上圖的灰色面積以符號 a, b, c, d 表示。

(3) 證明下圖中的灰色區域面積為

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta 。$$

(4) 證明柯西不等式

$$(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

成立。

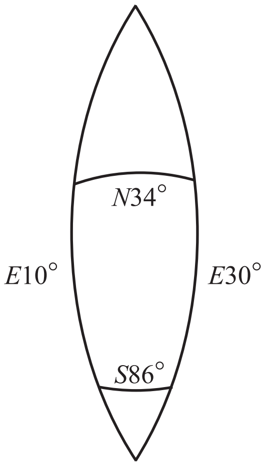
〔玩鎖・玩索〕

「無字證明」並不是不需要文字說明就可以完全理解，而是僅需極少的解釋就能得證的意思。越是好的「無字證明」，所需的輔助文字越少。「無字證明」並不是新產物或新的名詞，回想國中時，畢氏定理的幾何證明就有點像無字證明的模式。據說，這道無字證明的靈感就是來自畢氏定理的幾何證明。

遊戲 2

☆☆☆

如果將半徑 6300 公里的地球比喻成一顆橘子，那麼剝取橘子的一瓣來看，它的外表邊緣就是所謂的經線，如下圖所示，而跟經線垂直的就是緯線。在沒有全球定位系統之前，北極星可以幫航海家確定緯度，但並沒有明確的事物可以確認各條經線的精確位置。

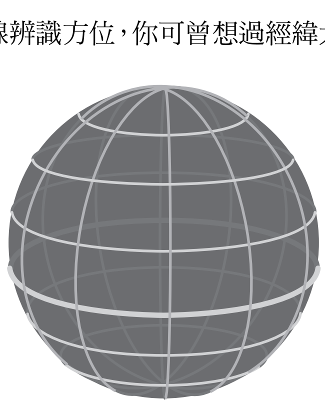


在上圖中，航海家從東經10° ，北緯 34° 出發，沿著北緯 34° 的緯線航行，到東經 30°，北緯 34° 時，轉向東經 30° 的經線往南航行，又到東經 30° ，南緯 86° 時，轉向南緯 86° 的緯線向西航行，直到東經10°，南緯 86° 時，再轉向沿著東經10° 的經線北上，到達出發的東經10° ，北緯 34° 的出發地。問：此航海家繞這一大圈，共是幾公里？

〔參考數據： $\cos26° \approx 0.9$ 〕

〔玩鎖・玩索〕

生活在都市叢林的人靠十字路口認路，而航海家借經緯線辨識方位，你可曾想過經緯大不同嗎？



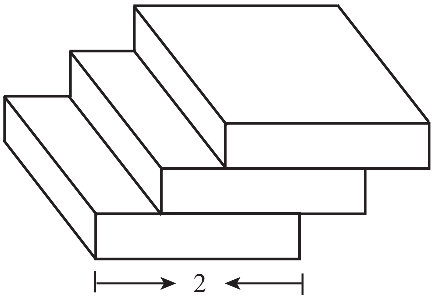
往南北兩極的緯線環肥燕瘦各不同，但每條經線卻都是半徑 6300 公里的大圓。緯線度數可透過北極星與地心引力方向的夾角來決定，但經線的確認變成了難題。英國國會在 1714 年提出所謂的「經線法案」，在法案中允諾提出二萬英鎊的賞金，給解決經度之謎的人。競逐賞金的科學家不勝枚舉，但都沒有成功，包括解不開的伽利略與以為不能解的牛頓。

除了科學家提出的各種不同解法之外，還有許多異想天開的方法，其中「狗吠法」是最滑稽，也最鮮的一種。在當時流行一種據說可以隔空療傷的偽藥，只要在接觸過身體的紗布塗上這種藥物，身體的傷就會好，但塗抹同時，身體會產生劇痛。所以船長會攜帶一隻受傷的狗上船，其實是上船時故意用刀抽傷這隻可憐的狗，並將一片紗布與狗的傷口接觸。將此紗布放在格林威治村，每到格林威治村的正午時刻，就有專人在這紗布上塗抹可以隔空療傷的偽藥，此時船上的狗會大叫，船長自然知道現在就是格林威治村的正午時刻，只需觀看太陽的位置與角度，就可以清楚船隻所在地的時間，兩地的時間差就可以算出船現在所處的經度。

能打敗伽利略的巧手，超越牛頓的頭腦，並解出經度之謎，贏得鉅額獎金的人，究竟是何方神聖呢？說來你可能不相信，這位尋找地球刻度的達人只是一位未受過教育的鐘錶匠—約翰・哈里遜。哈里遜製造出，在風吹雨打日曬，冷熱潮溼與顛簸震盪之下，依然可以走得很準確的鐘錶，只需帶著這只手錶從格林威治村出海，任何時候都可以知道格林威治村的精確時間。當然就知道船隻所在地的經度了。有關地球經度之謎及其歷史，推薦時報出版，戴瓦・梭貝爾所著的書《尋找地球刻度的人》。

遊戲 3
☆☆☆☆

將長、寬、高及密度皆相同的均勻長方體木板三塊，一塊塊往上堆，堆的時候遵循以下規則：木板的兩個側面須上下對齊，而上方的木板必須較下方的木板靠右或是完全重疊，如下圖所示。



設木板側面長為 2 單位，中間的長方體木板比最底層的長方體木板右移 x_1 單位，最上層的長方體木板又比中間的長方體木板右移 x_2 單位。

(1) 讓三塊木板維持不倒塌，x_1 與 x_2 需滿足的不等式組為何？

(2) 在坐標平面上，畫出上述不等式組區域。

〔玩鎖・玩索〕

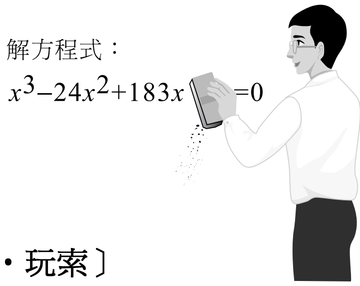
讓木板維持不倒塌的物理性質為何呢？當然是上層的重心必須落在下層木板上，不可以落空，否則就會倒塌。根據這物理規律，不難列出所有 x_1, x_2 滿足的不等式組。實作時，可以先考慮兩塊長方體木板的情形，再推演到三塊長方體木板的情況。

你可曾想過，當長方體木板往上堆疊得妙的話（當然要求每一塊都比下層的那一塊右移一些），可以一直無窮盡的往上堆嗎？這答案是肯定的，而且每一次右移的距離公式 x_n 還蠻有規律的。

遊戲 4
☆☆

珍愛穗同學上數學課時睡著了，醒來時發現同學正在做老師出在黑板的一道測驗題。就在這時候，老師正拿著板擦擦掉這道題目。老師邊擦邊喃喃自語說著：「提醒你們，這三次多項方程式的根會成等差數列。」

你能幫珍愛穗同學做這道測驗題嗎？



〔玩鎖・玩索〕

多項式的根與係數的關係是討論多項式方程式重要的公式，例如國中時，大家都學過：二次方程式 $ax^2-bx+c=0$ 的兩根 α, β 必有

$$\alpha+\beta=\frac{b}{a},\ \ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

的關係式。這兩個關係式可以利用兩根的公式解

$$\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \ \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

代入得到。但是，當方程式為三次 $ax^3-bx^2+cx-d=0$ 時，三根 α, β, γ 所滿足的關係式

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{b}{a};\\[2mm] \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\dfrac{c}{a};\\[2mm] \alpha\beta\gamma=\dfrac{d}{a},\end{cases}$$

就沒辦法套用根的公式來做。

事實上，這三個關係式可以利用比較係數的方法，比較多項式

$$x^3-\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x-\frac{d}{a}=0$$

與多項式

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\\&=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)x-\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

的係數得到。

玩數學～ 破解秘笈 第1期

遊戲 1

(1) 將右圖中對邊的兩個白色三角形拼在一起，就得到左圖的兩個白色四邊形。因此，左圖中的白色區域面積等於右圖中的白色區域面積。

(2) $ac+bd$ 。

(3) 因為灰色區域是個平行四邊形，所以面積為

$$2\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta\right)=$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta.$$

(4) 利用(1)(2)及(3)，得

$$\begin{aligned}ac+bd&=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\theta\\&\le\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}.\end{aligned}$$

將兩邊平方，得

$$(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

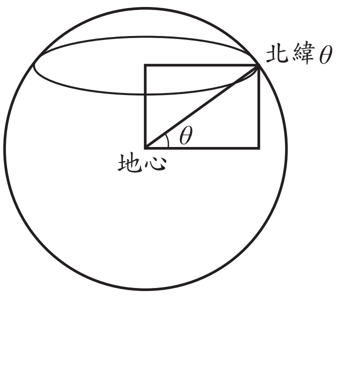
遊戲 2

繞一大圈所走的距離就相當於四段經緯線段的長度和。因為兩段經線的弧線夾角都是

$86°+34°=120°=\dfrac{2\pi}{3}$，又經線所在的大圓半徑都是 6300 公里，所以兩段經線的弧長和為

$$2r\theta=2\cdot6300\cdot\frac{2\pi}{3}=8400\pi \text{（公里）。}$$

現在只需計算兩段緯線的弧長即可，但是緯線的半徑都不一樣，所以先求取（南、北）緯 θ 的半徑，再求相應的弧長。如下圖所示，（南、北）緯 θ 的半徑為 $6300\cos\theta$ 。



因此，東經10°，北緯34°到東經30°，北緯34°的弧長為

$$6300\cos34°\cdot\frac{(30-10)\pi}{180}=700\pi\cos34°;$$

而東經10°，南緯86°到東經30°，南緯86°的弧長為

$$6300\cos86°\cdot\frac{(30-10)\pi}{180}=700\pi\cos86°.$$

兩條緯線線段和為

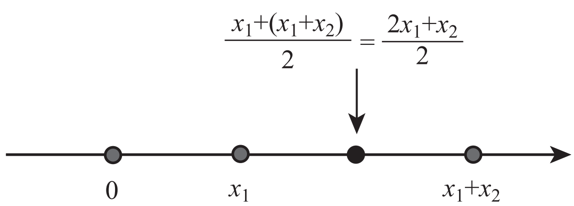
$$\begin{aligned}&700\pi\cos34°+700\pi\cos86°\\&=700\pi(\cos86°+\cos34°)\\&=700\pi\left(2\cos\frac{86°+34°}{2}\cos\frac{86°-34°}{2}\right)\\&=700\pi\cdot2\cos60°\cos26°\\&=700\pi\cdot0.9\\&=630\pi.\end{aligned}$$

故繞一大圈所走的距離為 $8400\pi+630\pi=9030\pi$ 公里。

遊戲 3

(1) 將第二塊長方體放在第一塊長方體上，不發生倒塌的條件為 $0\le x_1\le1$，即第二塊長方體的中心水平位置落在第一塊長方體上，同理第三塊長方體放在第二塊長方體上，第三塊長方體不發生倒塌的條件為 $0\le x_2\le1$ 。

現在只需讓第二塊與第三塊長方體綁在一起的中心水平位置落在第一塊長方體上即可，為了這情況，令坐標如下：將長方體中心的水平坐標畫在同一條數線上，並令最下層木板中心水平坐標為原點 0，中間的長方體中心水平坐標為 x_1，最上層木板中心水平坐標為 x_1+x_2，如下圖所示：



從圖中可以算出，第二塊與第三塊長方體綁在一起的中心水平坐標為

$$\frac{x_1+(x_1+x_2)}{2}=\frac{2x_1+x_2}{2}.$$

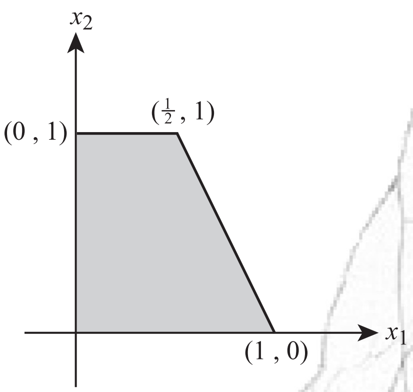
因為這中心水平位置必須落在第一塊長方體上，所以

$$\frac{2x_1+x_2}{2}\le 1 \Rightarrow 2x_1+x_2\le 2.$$

綜合得知，讓三塊木板維持不倒塌，x_1 與 x_2 滿足的不等式組為

$$\begin{cases}0\le x_1\le 1\\0\le x_2\le 1\\2x_1+x_2\le 2\end{cases}$$

(2) 在坐標平面上，畫出上述不等式組區域如下：



$\boxed{\text{遊戲 4}}$

設三根為 $a-d, a, a+d(d\ge 0)$，利用根與係數的關係，得

$$(a-d)+a+(a+d)=24\Rightarrow a=8.$$

再用根與係數的關係與 $d\ge 0$，得

$$(8-d)(8+d)+8(8-d)+8(8+d)=183\Rightarrow d=3.$$

故該三次方程式的三根為

$$5,\ 8,\ 11.$$

龍騰數亦優

讀者意見調查表

一、對《龍騰數亦優》各篇文章，您到目前爲止的閱讀狀態如何？各篇文章的參考價值如何？

參考價值 有	參考價值 無	篇名	閱讀狀況有 全部讀完	重要部份讀完	略翻	完全沒讀
探索						
☐	☐	1. 許教授講故事	☐	☐	☐	☐
講堂						
☐	☐	2. 認識證明…頭腦的五種功能之一	☐	☐	☐	☐
升學報報						
☐	☐	3. 台大數學系 95 學年度學士班甄選入學第二階段筆試試題	☐	☐	☐	☐
專欄						
☐	☐	4. 動手玩數學	☐	☐	☐	☐

整體而言，以上文章您最喜歡哪一篇？編號：____________

爲什麼？____________

____

____

二、內容實用度

您認爲《龍騰數亦優》最實用的三篇文章是：

(1)____________

(2)____________

(3)____________

您認爲《龍騰數亦優》內可有可無的三篇文章是：

(1)____________

(2)____________

(3)____________

理由爲：____________

____

三、對本期《龍騰數亦優》的意見

1. 題材的選擇
   ☐ 恰到好處　☐ 普通　☐ 不符需求
2. 內容的深度
   ☐ 艱澀難懂　☐ 普通　☐ 過於淺顯
3. 實用的效果
   ☐ 效果佳　☐ 普通　☐ 效果不佳
4. 標題前言
   ☐ 吸引人　☐ 普通　☐ 不吸引人
5. 照片插畫
   ☐ 清晰簡明　☐ 普通　☐ 複雜模糊
6. 整體呈現方式
   ☐ 美觀大方　☐ 普通　☐ 不利閱讀

您對本書之整體意見：____________

____

____

五、個人資料

姓名：____________ 電話：(O)____________ (H)____________

任教學校：____________ 任教年級：____________ 任教科目：____________

地址：☐☐☐____________

E-mail：____________

龍騰數亦優

親愛的讀者，您好：

感謝您對《龍騰數亦優》的支持，秉持著不斷精益求精的一貫信念，我們特別設計了這份問卷，希望藉由讀者的看法及意見，幫助我們更加精進。

謝謝您耐心填寫此信問卷，再次感謝您對我們的支持與愛護！

敬祝

教 學 愉 快

《龍騰數亦優》期刊　敬上

請自行黏貼後直接投郵

廣 告 回 信

台灣北區郵政管理局登記證

北台字第 3032 號

免貼郵票．限時專送

248

台北縣五股鄉五權七路 1 號

龍騰數亦優　期刊編輯室收