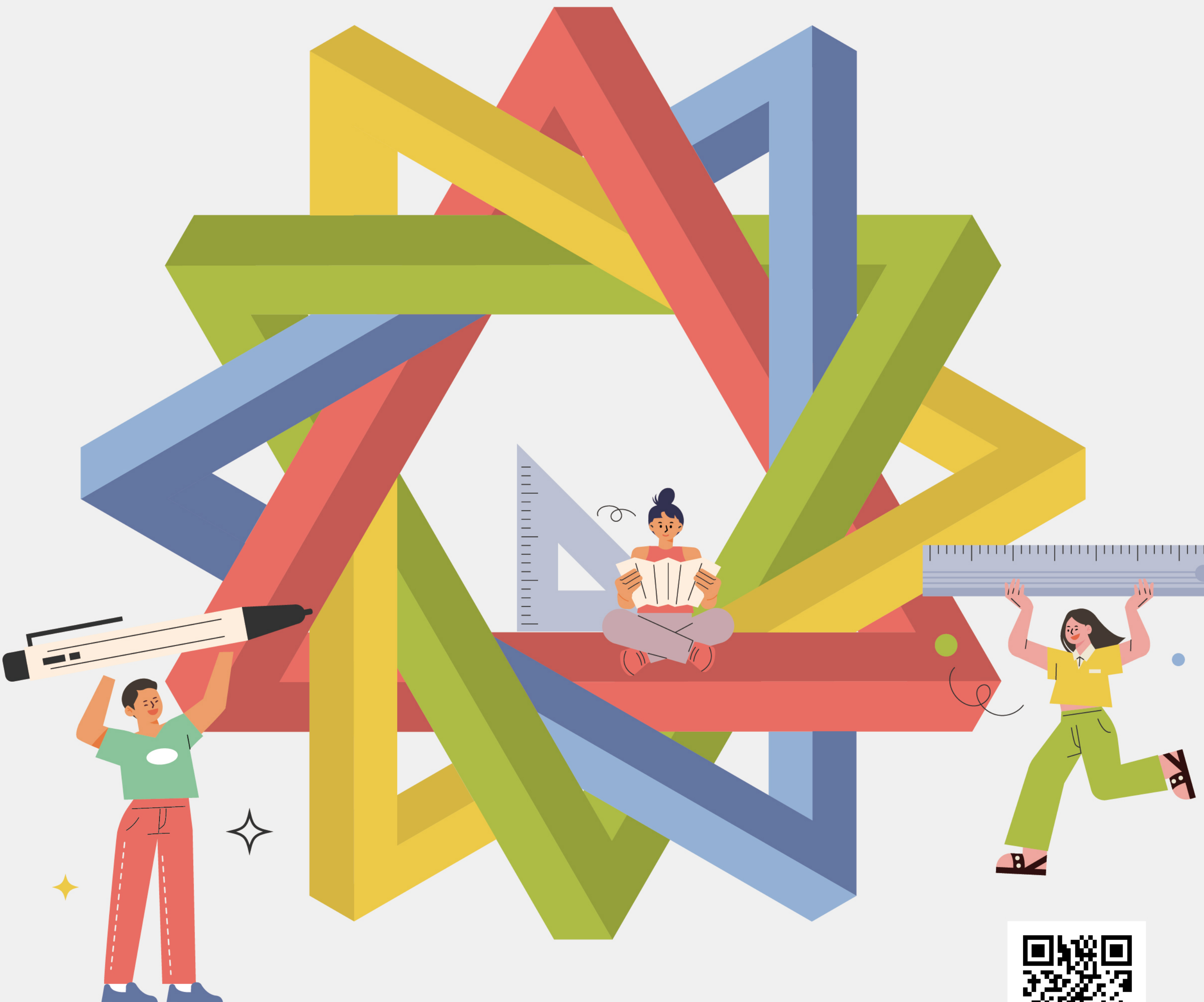
# 龍騰數亦優

龍騰業務跑天下　數學質好畫亦優

## 第46刊



贈品禁止轉售 #8

62001N3/H/000000

龍騰文化
肯定自己 ➤ 肯定不同

# 編輯室墨記

「數創遊戲」是以數學為理論基礎的數位遊戲，這裡的內容皆由許教授指導開發的遊戲素材，提供給老師與學生們參考，透過遊戲原理探究數學、練習數感，啟發不一樣的數學素養。

本期收錄〈111 學年度高中數學學科能力競賽〉決賽試題，包含了筆試、口試試題與獨立研究試題卷，提供給您參考。

彭良禎老師這一篇文章介紹「五複合正四面體」的稜邊規格，利用數學頂點坐標來推算組合摺紙或吸管串接的稜邊數據，而不同的旋轉方向也會產生結構的差異，透過本文的介紹，您不妨也一起來欣賞數學結合藝術的美妙。

李維昌老師這期的〈求解一道三元等次方和聯立方程組〉，轉換成解一元三次方程式，將為您帶來新的思路。

〈一次近似！切線？！必也正名乎！〉吳孝仁老師透過分科測驗的一道試題，將數學概念重新解構與建構，並利用計算機與繪圖軟體的操作，讓學生體會函數圖形的特徵，也希望善用科技工具，更有效率的傳達數學概念的本質與內涵。

摩斯密碼是世界上重要的密碼之一，它在電話尚未被發明之前，用於長距離的電報電訊技術，翻開動手玩數學，讓我們一起來試玩看看吧！

**※ 竭誠邀稿：**

歡迎將您的教學生活趣聞、甘苦談，教案分享、教材探討，以1000~2000字的內容，註明主題、作者簡歷、聯絡電話與地址，投稿予 ischang@ltedu.com.tw。



發 行 人：李枝昌
編輯顧問：許志農
總 編 輯：蔡欣樺
執行編輯：張幸蓮
美術編輯：彭文君

發 行 所：龍騰文化事業股份有限公司
地　　址：248021新北市五股區五工六路30號
電　　話：(02)2299-9063
傳　　真：(02)2298-9755
創 刊 日：2006/11/30
出 刊 日：2023/03/31
網　　址：https://www.ltedu.com.tw

# 龍騰數亦優

2023.04 目次

龍騰業務跑天下 數學質好畫亦優

# 專欄 Aifunschool 數創遊戲

許志農／臺灣師大數學系

數創遊戲是以數學為理論基礎的數位遊戲，這裡提供四款遊戲內容（由萬里遊科技公司研發、筆者指導開發）不僅可以讓學生訓練數感、探討背後的遊戲原理，也提供老師多元選修的參考，掃描遊戲文下方的 QRcode 即可開始進行遊戲。


### 靈感來源：威佐夫遊戲(Wythoff's Game)

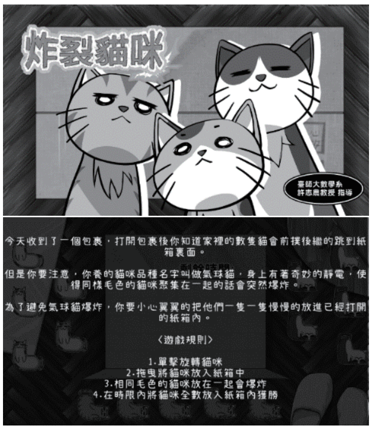
由荷蘭數學家威佐夫（Willem Abraham Wythoff）命名，並在數學理論中廣為人知的遊戲。

威佐夫遊戲是個雙人遊戲，遊戲中有兩堆籌碼，雙方要輪流取走籌碼，而取法有兩種，如下所述：

1. 取走一堆任意數量籌碼。
2. 取走兩堆相同數量的籌碼。

最終取走最後一顆籌碼者勝利。

威佐夫遊戲的最佳策略是使用斐波那契數列的公式，從第一堆中取出 $k$ 個籌碼，然後再取與對手相同的籌碼數量或盡量減少對手的籌碼數量，保持兩堆籌碼數量相等。（數學原理：斐波那契數列的性質）




### 靈感來源：拼圖鑲嵌

早期的拼圖遊戲的製作程序需經過「在木板上繪製圖案」、「線鋸切割為零散碎片」、「製作方框（容器）以放置零散碎片等三步驟，因此在英文中以 Jigsaw puzzle 命名，爾後發展出立體拼圖、互鎖拼圖等多元且趣味橫生的益智遊戲。

拼圖鑲嵌中，拼圖碎片需要以特定的方式鑲嵌在一起才能構成完整的圖案。這種鑲嵌的方式與物體的形狀、邊界和空間的性質有關，而這些都是拓樸學所關注的。例如：有些拼圖碎片的邊界是連續的，而有些則是斷裂的，這對於鑲嵌圖案的方式有著重要的影響。

群論是另一個與拼圖鑲嵌相關的數學領域。在拼圖鑲嵌中，碎片可以通過旋轉、翻轉等操作來改變它們的位置和方向，這些操作形成了一個群。研究這個群的性質可以幫助我們更好地理解拼圖鑲嵌的特性。


**靈感來源：圍貓遊戲、天使問題**

天使問題首次見於 1982 年出版的《Winning Ways》一書，由數學家約翰・何頓・康威（John H. Conway）提出。

這是一個雙方玩家分別扮演天使和惡魔的博弈遊戲。遊戲在一個無限大方格棋盤上進行，起始棋盤是空的。

定義正整數 $k$ 為天使的階數，$k$ 階天使每步可以跳到 $k*k$ 範圍內的任何一格，無論路上有沒有障礙物。

康威在提出問題時已經給出了部分惡魔有必勝策略的情況證明。至於天使有必勝策略的情況，則要等到 2006 年才由 4 位其他數學家獨立證明。

天使問題中天使可以朝八個不同方向進行移動，而圍貓遊戲則限制貓咪只能朝六個方向移動讓整體難度進一步下降。


**靈感來源：夏農的斷開遊戲**

克勞德・夏農被稱為「數碼時代之父」，夏農提出的二進制數字是現代計算機中最基本的單元之一，由「0」和「1」組成。

這種數字系統的核心概念是利用「連接」和「斷開」來表示所有的信息，並且在電路中以電流或沒有電流的狀態來實現這些「連接」和「斷開」的操作。

二進制數字不僅讓計算機更加高效和精確，同時也簡化了計算機系統的設計和開發過程。

# 111學年度高中數學學科能力競賽（決賽）

## 筆試（一）試題卷

1. 設 $a$ 、$b$ 、$c$ 是正實數，且滿足條件 $ab+bc+ca+2abc=1$，試證：

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{2abc}\geq 16\text{，}$$

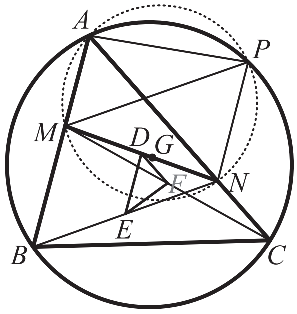
並求等號成立時，$a$ 、$b$ 、$c$ 之值分別是多少？

2. 已知有五個不同的四位數，它們的千位數字相同且它們的和恰能被其中的四個數整除，求所有滿足此條件的五個數。

3. 如圖，設銳角 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}>\overline{AB}$，點 $M$ 、$N$ 分別在邊 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 上滿足 $\overline{AM}<\overline{AN}$，$\triangle ABC$ 與 $\triangle AMN$ 的外接圓交於相異兩點 $A$、$P$ 。設 $D$ 、$E$ 、$F$ 分別為 $\overline{MN}$ 、$\overline{BN}$ 、$\overline{CM}$ 的中點，$\triangle DEF$ 的外接圓與 $\overline{MN}$ 再交於 $D$ 與 $N$ 之間的一點 $G$ 。證明：

(1) $\triangle DEF\sim\triangle PMN$

(2) $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EG}}=\dfrac{\overline{MP}}{\overline{NA}}$




## 筆試（二）試題卷

1. 設 $a$ 、$b$ 、$c$ 為正整數，且 $c(ac+1)^2=(5c+2b)(2c+b)$，試證：$c$ 必為奇數且 $c$ 為完全平方數。

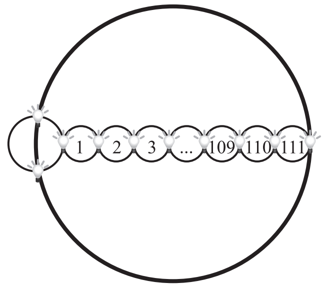
2. $S=\{2350,2351,\cdots,2350+k\}$，求所有的正整數 $k$，使得集合 $S$ 能分成元素和相等且交集為空集合的兩個子集合 $S_1$ 與 $S_2$ 。

3. 設 $x\geq 3$ 且三角形的三邊長為 $\log x$，$\log(x+1)$ 和 $\log(x^2+1)$。證明此三角形為鈍角三角形且其鈍內角度數大於 $120°$ 。

## 口試試題

1. 設$n$為正整數。已知不等式$a_{2n}^2 \ge c\left(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}\right)+a_{2n}$對任意嚴格遞增的正整數數列 $a_1<a_2<\cdots<a_{2n}$均成立，試求常數$c$的最大可能值。（此最大值可能與$n$有關）

2. 以下圖形為某公園的道路圖，每個道路交叉口都有一盞燈，可以是打開的或關掉的。每一個被道路分割產生的區域都有一個開關，按這個開關後會改變相鄰路燈的狀態，開的會被關掉，關掉的會被打開。請證明不論開始所有路燈開關的情形為何，都可以適當的按壓不同區域的開關，讓所有的燈都被關掉。




## 獨立研究（一）試題卷

1. 已知實數$a$、$b$、$c$皆介於 0 與 1 之間，且$x$、$y$、$z$為正實數，如果$a^x=bc$，$b^y=ca$，$c^z=ab$，試證：

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le\frac{3}{4}\text{ 。}$$

2. 若$m$個互不相同的正偶數與$n$個互不相同的正奇數之總和為2022，求滿足這樣條件的$m$與$n$，其$4m+3n$的最大值。

3. 數線上每個整數的位置有一個箱子（規定箱子編號即為其所在的整數位置），位於原點的箱子（故此箱編號為 0）中有一個石頭，其他箱子都是空的，每一次我們可以進行下列操作之一：
   (1)（分裂）在某個非空箱子拿出一個石頭，然後在其左、右的箱子各放入一顆石頭。
   (2)（合併）選擇編號相差 2 的兩個非空箱子，各拿出一個石頭，然後在中間箱子放入一個石頭。

   如果經過若干次操作之後，竟然只剩下一個石頭，試求出這個石頭所在箱子編號的所有可能。

## 獨立研究（二）試題卷

1. 設$\{a_n\}$為一個無窮的整數數列，且滿足$a_n \neq -1$，
$a_{n+2}a_{n+1}+a_{n+2}-a_n-108=0$，$n\in\mathbb{N}$，求這種$\{a_n\}$的個數有多少？

2. 對於一個$\{1,2,\cdots,n\}$的排列$\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$，定義一隨機變數$X$如下：先約定$\sigma_0=\sigma_{n+1}=0$。對$1\le i\le n$，如果$\sigma_{i-1}<\sigma_i$且$\sigma_i>\sigma_{i+1}$，則稱$\sigma_i$是一個「山頂」。定義$X$取值為「山頂出現的次數」。例如：53261784有三個山頂$(5,6,8)$，故$X=3$。若每個$\{1,2,\cdots,n\}$的排列被選取的機會相同，求$E(X)$。

3. 圓內接四邊形$ABCD$的一組對邊$\overline{AD}$和$\overline{BC}$的延長線相交於點$P$，另一組對邊$\overline{AB}$和$\overline{CD}$的延長線相交於點$Q$，$\angle P$和$\angle Q$的平分線相交於點$R$。對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於點$K$，$\angle DKC$的平分線交$\overline{CP}$於點$M$。求證：
(1) $\overline{PR}\perp\overline{QR}$
(2) $\overline{QR}\perp\overline{KM}$

## 參考答案

### 筆試（一）試題解析

1. 因為$1=ab+bc+ca+2abc \Leftrightarrow 3=ab+bc+ca+2abc+2$
$\Leftrightarrow 3+ab+bc+ca+2(a+b+c)=2abc+2(ab+bc+ca)+2(a+b+c)+2$
$\Leftrightarrow (b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)+(a+1)(b+1)=2(a+1)(b+1)(c+1)$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=2$，
如果$x$、$y$皆為正實數，則由算幾不等式得$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$，且當$x=y$時等號成立。
$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4a+1}\ge\dfrac{1}{a+1}$，$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4b+1}\ge\dfrac{1}{b+1}$，$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4c+1}\ge\dfrac{1}{c+1}$，
將三式相加，可得：
$1+\dfrac{1}{4a+1}+\dfrac{1}{4b+1}+\dfrac{1}{4c+1}\ge\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}$
$\Rightarrow \dfrac{1}{4a+1}+\dfrac{1}{4b+1}+\dfrac{1}{4c+1}\ge 1$（因為$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=2$）
$\Leftrightarrow (4b+1)(4c+1)+(4c+1)(4a+1)+(4a+1)(4b+1)\ge(4a+1)(4b+1)(4c+1)$
$\Leftrightarrow 16(ab+bc+ca)+8(a+b+c)+3\ge 64abc+16(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+1$
$\Leftrightarrow 4(a+b+c)+2\ge 64abc$
$\Leftrightarrow 2(a+b+c)+1\ge 32abc$

$\Leftrightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{2abc}\geq 16$，

故當 $3=4a+1$，$3=4b+1$，$3=4c+1$，即 $a=b=c=\frac{1}{2}$ 時，等號成立。

2. 設此五個數為 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$，而其千位數字為 $k$，

令 $S$ 為此五個數的和，

$1000k\leq a_i<1000(k+1)$，$i=1,2,3,4,5$，

$\Rightarrow a_i+4000k\leq S<4000(k+1)+a_i$

$\Rightarrow 1+\frac{4k}{1+k}<1+\frac{4k}{\frac{a_i}{1000}}\leq\frac{S}{a_i}<1+\frac{4(k+1)}{\frac{a_i}{1000}}<1+\frac{4(k+1)}{k}=5+\frac{4}{k}$

$\Rightarrow k=1$，$3<\frac{S}{a_i}<9$，$\frac{S}{a_i}$ 的可能值為 4, 5, 6, 7, 8

$\Rightarrow k\geq 2$，不可能包括上面那些數

$\Rightarrow \frac{S}{a_i}$ 的值為(i)4, 5, 6, 7 或(ii)5, 6, 7, 8。

(i) $S=4a_i$，$S=5a_i$，$S=6a_i$，$S=7a_i$，

所以 $S=420t$，因此五個數為 $60t, 70t, 84t, 105t, 101t$，

$t=17$, 1020, 1190, 1428, 1785, 1717，

$t=18$, 1080, 1260, 1512, 1890, 1818，

$t=19$, 1140, 1330, 1596, 1995, 1919。

(ii) $S=5a_i$，$S=6a_i$，$S=7a_i$，$S=8a_i$，

所以 $S=840t$，因此五個數為 $105t, 120t, 140t, 168t, 307t$，

但 $\frac{307t}{105t}>2$（不滿足條件），

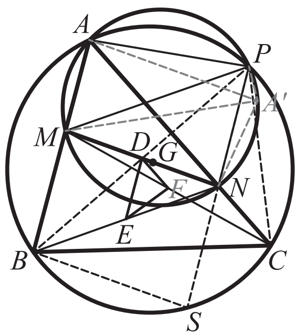
故五數為(i)中之數。

3. (1) (i) 先觀察 $\triangle PMN\sim\triangle PBC$：$\overline{PN}$ 與 $\triangle ABC$ 的外接圓再交於點 $S$，則

$\angle MPN=\angle MAN=\angle BAC=\angle BPC$，

$\angle PNM=180^\circ-\angle BAP=\angle BSP=\angle BCP$，

所以得 $\triangle PMN\sim\triangle PBC$。




(ii) 因此得 $\angle MPB=\angle MPN-\angle BPN=\angle BPC-\angle BPN=\angle NPC$，

且 $\frac{\overline{MP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{NP}}{\overline{CP}}$，故 $\triangle PMB\sim\triangle PNC$。

(iii)因 $D$、$E$、$F$ 為中點，$\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，$\overline{DF}\,//\,\overline{AC}$，

得 $\angle EDF=\angle BAC=\angle MAC=\angle MPN$。

又 $\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{MB}}{\frac{1}{2}\overline{NC}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}}$（因為 $\triangle PMB\sim\triangle PNC$）。

由此得 $\triangle PMN$ 與 $\triangle DEF$ 相似。

(2) 設 $A'$ 為 $\triangle AMN$ 的外接圓上一點使得 $\overline{AA'} // \overline{MN}$ ，所以 $AMNA'$ 為圓內接等腰梯形，得

$\angle GDE = \angle NMB = \angle A'AM = \angle A'PM$ 或 $180° - \angle A'PM$ ，

所以得 $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EG}} = \dfrac{\sin\angle DFE}{\sin\angle GDE} = \dfrac{\sin\angle PNM}{\sin\angle A'PM} = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{MA'}} = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{NA}}$ 。

## 筆試（二）試題解析

1. (i) 利用反證法，假設 $c$ 為偶數，即 $c = 2c_1$ 。

原式改寫為： $c_1(2ac_1+1)^2 = (5c_1+b)(4c_1+b)$ ，

令 $d = (b, c_1)$ ， $b = db_0,\ c_1 = dc_0$ ，其中 $(b_0, c_0) = 1$ ，

$\Rightarrow\ c_0(2adc_0+1)^2 = d(5c_0+b_0)(4c_0+b_0)$ 。

因為 $(c_0, 5c_0+b_0) = (c_0, 4c_0+b_0) = 1$ 且 $(d, (2adc_0+1)^2) = 1 \Rightarrow d \mid c_0,\ c_0 \mid d$ ，

所以 $d = c_0$ 且 $(2adc_0+1)^2 = (5c_0+b_0)(4c_0+b_0)$ ，

因為 $(5c_0+b_0, 4c_0+b_0) = (c_0, 4c_0+b_0) = (c_0, b_0) = 1$ ，

因此可設 $5c_0+b_0 = m^2,\ 4c_0+b_0 = n^2$ ，其中 $m$ 、$n$ 為正整數，

所以 $m > n$ ，即 $m-n \ge 1\ \Rightarrow\ d = c_0 = m^2 - n^2 \Rightarrow\ 2ad^2+1 = 2adc_0+1 = mn$ ，

因此 $mn = 1+2ad^2 = 1+2a(m^2-n^2)^2 = 1+2a(m-n)^2(m+n)^2$

$\ge 1+2a(m+n)^2 \ge 1+8amn \ge 1+8mn$ ，

即 $7mn \le -1$（不合），所以 $c$ 不為偶數。

(ii) 令 $d = (b, c)$ 且 $b = db_0, c = dc_0$ ，其中 $M(b_0, c_0) = 1$ ，

則原式為 $c_0(adc_0+1)^2 = d(5c_0+2b_0)(2c_0+b_0)$ ，

因為 $(b_0, c_0) = 1$ 且 $c_0$ 為奇數，

所以 $(c_0, 2c_0+b_0) = 1 = (c_0, 5c_0+2b_0) \Rightarrow c_0 \mid d$ ，又 $(d, (adc_0+1)^2) = 1 \Rightarrow d \mid c_0$ ，

故 $c_0 = d,\ c = dc_0 = d^2$ ，得證。

2. $\sum_{n=0}^{k}(2350+n) = 2350(k+1) + \dfrac{k(k+1)}{2}$ 必為偶數，

$4 \mid k(k+1)$ ，則 $k = 4h$ 或 $k = 4h+3$ 。

(i) 設 $k = 4h+3$ ， $h = 0, 1, 2, \cdots$ ，

令 $S_1 = \left\{2350+i \mid i = 4h, 4h+3, h = 0, 1, 2, \cdots, \left[\dfrac{k}{4}\right]\right\}$ ，

$S_2 = \left\{2350+i \mid i = 4h+1, 4h+2, h = 0, 1, 2, \cdots, \left[\dfrac{k}{4}\right]\right\}$ ，

則 $S_1$ 與 $S_2$ 滿足所求，因此對所有非負整數 $h$， $k = 4h+3$ 均為所求。

(ii) $k=4h$ ， $h=1,2,\cdots$ ，

不失其一般性，$S_1$元素的個數$\geq 2h+1$，$S_2$元素的個數$\leq 2h$，

即$\sum_{j=0}^{2h}(2350+j)\leq \sum_{j=2h+1}^{4h}(2350+j)=(2h)^2+\sum_{j=1}^{2h}(2350+j)$，

$h\geq 25$ ，則$k\geq 100$ ，

若$k=4h$且$k\geq 100$ ，則$S$存在滿足的二子集合分割，

$k=100$ ，

$S_3=\{2350,2351,\cdots,2350+50\}$ ，

$S_4=\{2350+51,2350+52,\cdots,2350+100\}$ ，

$S_3$中元素的和為$2350\times 51+1275$ ，

$S_4$中元素的和為$2350\times 50+1275+2500$ ，

所以$S_1=S_3\cup\{2425\}-\{2350\}$ ， $S_2=S_4\cup\{2350\}-\{2425\}$ ，

$k>100$ ，

則前面 101 個數依上面的方式來分，而後面$k-100=4h$的數，

每相連接的四個數則依(i)的方式來分即可。

故所有的正整數值為：$\{k\mid k=4h+3,h=0,1,2,\cdots；k=4h,h=25,26,\cdots\}$ 。

3. 三角形的最長邊為$\log(x^2+1)$，對應此邊的內角的餘弦為

$$\frac{(\log x)^2+(\log(x+1))^2-(\log(x^2+1))^2}{2\log x\log(x+1)}，$$

以下證明此式小於$\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$ ，也就是鈍內角度數大於$120^\circ$ 。

由$\frac{(\log x)^2+(\log(x+1))^2-(\log(x^2+1))^2}{2\log x\log(x+1)}<-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow (\log x+\log(x+1))^2-(\log(x^2+1))^2<\log x\log(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{x(x+1)}{x^2+1}\log x(x+1)(x^2+1)<\log x\log(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{x(x+1)}{x^2+1}\log x(x+1)(x^2+1)<\log x^{\frac{1}{4}}\log(x+1)^4，$$

只需證明：當$x\geq 3$時，

(i) $x^{\frac{1}{4}}>\frac{x(x+1)}{x^2+1}$ ，

(ii) $(x+1)^4>x(x+1)(x^2+1)$ ，

其中(ii)明顯成立，對於(i)可由$x^{\frac{1}{4}}>\frac{x(x+1)}{x^2+1}\Leftrightarrow x>\left(\frac{x(x+1)}{x^2+1}\right)^4$，

令 $x=a+3$ ，$a\ge 0$ 代入上式，即需證明

$$a+3>\left(\frac{a^2+7a+12}{a^2+6a+10}\right)^4=\left(1+\frac{a+2}{a^2+6a+10}\right)^4$$

注意

$$\left(1+\frac{a+2}{a^2+6a+10}\right)^4<\left(1+\frac{a+2}{(a+2)(a+4)}\right)^4=\left(1+\frac{1}{a+4}\right)^4\le\left(1+\frac{1}{4}\right)^4<3\le a+3\text{，}$$

至此證明完畢。

## 口試試題解析

1. 常數 $c$ 的最大可能值為 $\dfrac{4n-2}{n}$ 。

令 $a_i=i$ ，則 $(2n)^2\ge c\big(1+3+\cdots+(2n-1)\big)+2n=cn^2+2n$ ，整理可得 $c\le\dfrac{4n-2}{n}$ 。

以下證明：對任意的嚴格遞增正整數數列 $a_1<a_2<\cdots<a_{2n}$ ，都有

$${a_{2n}}^2\ge\frac{4n-2}{n}\big(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}\big)+a_{2n}\text{ 。}$$

由於對任一 $i=1,2,\dots,2n-1$ ，都有 $a_i\le a_{2n}-(2n-i)$ 。所以

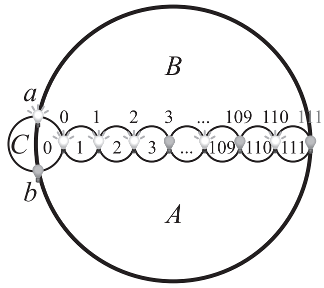
$$\begin{aligned}
\text{左}-\text{右}&={a_{2n}}^2-\frac{4n-2}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1}-a_{2n}\\
&\ge {a_{2n}}^2-\frac{4n-2}{n}\left(na_{2n}-\sum_{i=1}^{n}(2n-(2i-1))\right)-a_{2n}\\
&={a_{2n}}^2-\frac{4n-2}{n}\big(na_{2n}-n^2\big)-a_{2n}\\
&={a_{2n}}^2-(4n-1)a_{2n}+(4n^2-2n)\\
&=(a_{2n}-2n)^2+(a_{2n}-2n)\text{，}
\end{aligned}$$

因為 $a_{2n}\ge 2n$ ，故上式恆大於或等於 0，得證。

**[註]** 此題改編於 2003 中國女子數奧競賽。原題為「給定正整數 $n$，找出最大實數 $\lambda$，使得不等式 $a_n\ge\lambda\big(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\big)+2a_n$ 對任意遞增正整數數列 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 均成立。」

答案：$\dfrac{2n-4}{n-1}$ 。

2. 我們把區域編號如下（0-111, $A$ , $B$ , $C$ ），同時也把路燈編號為 0-111, $a,b$ ，燈 $n$ 是第 $n$ 區右邊的路燈，$a,b$ 則分別是 0 區的上和下。開始時如果 $a,b$ 一開一關，我們可以按 $A$ 讓它們同開或同關。假設燈 $n$+1-111 都是關的，燈 $n$ 是開的，可以按區域 $n$ 讓燈 $n$-111 都是關的，而且 $a,b$ 仍然是同開或同關。重覆同樣的方法，可以把 0-111 都關掉。這時如果 $a,b$ 也是關的就完成了，如果 $a,b$ 都是開的，只要再按 $C$ 區就可以把它們關掉。




## 獨立研究（一）試題解析

1. 令 $u=\log_{\frac{1}{2}} a, v=\log_{\frac{1}{2}} b, w=\log_{\frac{1}{2}} c$ ，

由 $a^x=bc \Rightarrow x\log_{\frac{1}{2}} a=\log_{\frac{1}{2}} b+\log_{\frac{1}{2}} c \Rightarrow x=\dfrac{v+w}{u}$ ，

同理可得 $y=\dfrac{u+w}{v}, z=\dfrac{u+v}{w}$ 。

欲證：$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{z+2}\le\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\frac{v+w}{u}+2}+\dfrac{1}{\frac{u+w}{v}+2}+\dfrac{1}{\frac{u+v}{w}+2}\le\dfrac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{2u+v+w}+\frac{v}{u+2v+w}+\frac{w}{u+v+2w}\le\frac{3}{4}$$ 。

令 $s=u+v+w$ ，因此上式

$$\Leftrightarrow \frac{u}{s+u}+\frac{v}{s+v}+\frac{w}{s+w}\le\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(1-\frac{u}{s+u}\right)+\left(1-\frac{v}{s+v}\right)+\left(1-\frac{w}{s+w}\right)\ge\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{s+u}+\frac{s}{s+v}+\frac{s}{s+w}\ge\frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\ge\frac{9}{4s} \Leftrightarrow 4s\left(\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\right)\ge 9$$

利用柯西不等式，可得

$$4s\left(\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\right)=[(s+u)+(s+v)+(s+w)]\left(\frac{1}{s+u}+\frac{1}{s+v}+\frac{1}{s+w}\right)\ge(1+1+1)^2=9$$ ，

因此 $\dfrac{s}{s+u}+\dfrac{s}{s+v}+\dfrac{s}{s+w}\ge\dfrac{9}{4}\Rightarrow\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{1}{z+2}\le\dfrac{3}{4}$ ，故得證。

2. 設 $2 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ 為 $m$ 個互不相同的正偶數及 $1 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ 為 $n$ 個互不相同的正奇數。由題意知

$2022 = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \ge 2 + 4 + \cdots + 2m + 1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = m^2 + m + n^2$ ，

故 $\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 \le 2022 + \frac{1}{4}$ 。

利用柯西不等式，可得 $4\left(m + \frac{1}{2}\right) + 3n \le 5\sqrt{2022 + \frac{1}{4}}$ ，

故 $4m + 3n \le \left[5\sqrt{2022 + \frac{1}{4}} - 2\right] = 222$ 。

取 $m = 36$ ， $n = 26$ ，可得 $4m + 3n = 222$ ，

取 2, 4,⋯, 68, 70, 72 共 36 個偶數，並取 1, 3,⋯,49, 51 共 26 個奇數，此時總和為 2008。

故可取 2, 4,⋯, 68, 70 共 35 個偶數以及 86，並取 1, 3,⋯,49, 51 共 26 個奇數。

3. 箱子所有可能的編號為 6 的整數倍。

首先不難操作使得只有一個石頭在編號 6 的箱子中，平移得到所有 6 的倍數皆可以。其次，將位於編號為 $n$ 的箱子中的每一個石頭賦值 $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$ ，則每次操作後所有石頭的賦值之和是一個不變量。（動機是左中右為 $\cdots, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, 1, x, x^2, \cdots$ ，要有 $1 + x^2 = x$ ，解得 $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ，即為 1 的六次方根）

但一開始的石頭賦值總合為 1，故除了編號為 6 的倍數外皆不可能。

## 獨立研究（二）試題解析

1. $a_{n+3}a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+1} - 108 = 0$

$a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+2} - a_n - 108 = 0$

$a_{n+2} - a_n = (a_{n+2} + 1)(a_{n+3} - a_{n+1})$

$a_3 - a_1 = (a_3 + 1)(a_4 - a_2)$

$a_4 - a_2 = (a_4 + 1)(a_5 - a_3)$

…………………………………

(i) 若 $a_3 - a_1 \ne 0$ ，得 $a_4 - a_2 \ne 0$ ，得 $a_5 - a_3 \ne 0$ ，⋯⋯

對 $n \ge 1$ ， $0 < |a_{n+3} - a_{n+1}| = |a_{n+2} - a_n| \cdot \frac{1}{|a_{n+2} + 1|} \le |a_{n+2} - a_n|$ ，

所以，$\{|a_{n+2} - a_n|\}$ 為非遞增正整數序列，

存在 $N$，對於所有 $n \ge N$ ，

$|a_{n+2} + 1| = 1$ ，即對於 $n \ge N + 2$ ， $a_n = 0, -2$ ，

因為$a_{N+4}=\dfrac{a_{N+2}+108}{a_{N+3}+1}$，所以$a_{N+4}$之值可能為$\dfrac{0+108}{0+1}=108$，$\dfrac{0+108}{-2+1}=-108$，

$\dfrac{-2+108}{0+1}=106$，$\dfrac{-2+108}{-2+1}=-106$，

$a_{N+4}=0,-2$所以不可能。

(ii) 若$a_3-a_1=0$，得$a_4-a_2=0$，得$a_5-a_3=0$，……

則$a_1=a_3=a_5=\cdots$；$a_2=a_4=a_6=\cdots$，

$n=1$，$a_1=a_3$得$a_1=\dfrac{a_1+108}{a_2+1}$，即$a_1a_2=108=2^2 3^3$，

$a_1$值的個數為$2(2+1)(3+1)$去除當其值為$-1,-108$，所以為 22 個，$a_2=\dfrac{108}{a_1}$，

此數列型式為$a_1,a_2,a_1,a_2,a_1,a_2,\cdots$。

2. 考慮一表格，以排列為列，以 $1,2,\cdots,n$ 為行，若 $j$ 是 $\sigma_i$ 的山頂，則填$(\sigma_i,j)=$●，否則填○。只要算有幾個●即可，關鍵是直著算。

**引理**：第 $j$ 行有 $j(j-1)(n-2)!$ 個●

**證明**：第一行沒有●，第 2 行有$2\times(n-2)!$個●，第$n$行每個位置都是●

對於第 $j$ 行$(3\le j\le n-1)$

(1) 若$\sigma_1=j$為山頂，則$\sigma_2$有 $j-1$ 種可能，故有$(j-1)\times(n-2)!$種可能。

(2) 若$\sigma_n=j$為山頂，則$\sigma_{n-1}$有 $j-1$ 種可能，故有$(j-1)\times(n-2)!$種可能。

(3) 若$\sigma_k=j$為山頂，則$\sigma_{k-1}\in\{1,2,\cdots,j-1\}$有 $j-1$ 種可能，

$\sigma_{k+1}\in\{1,2,\cdots,j-1\}-\{\sigma_{k-1}\}$有 $j-2$ 種可能，故有$(j-1)(j-2)\times(n-3)!$個●，

但 $k$ 有 $n-2$ 個可能值，因此一共有

$$(j-1)(j-2)\times(n-3)!\times(n-2)=(j-1)(j-2)\times(n-2)!$$

個●。

由(1) + (2) + (3)得 $j(j-1)\times(n-2)!$，且此式對 $j=1,2,n$ 也都成立，故引理得證。

因此所求為

$$E(X)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} j(j-1)(n-2)!}{n!}=\dfrac{n+1}{3}，n\ge 2\\ 1，n=1\end{cases}。$$

3. 設直線$\overline{PR}$交$\overline{DC}$、$\overline{DB}$、$\overline{BA}$分別於點$E$、$F$、$G$。

(1) 因為$\angle EFQ=\angle BAD+\angle APF$、$\angle FEQ=\angle DCP+\angle EPC$，且$\angle BAD=\angle DCP$、$\angle APF=\angle EPC$，所以$\angle EFQ=\angle FEQ$。又因$\overline{QR}$為頂角$\angle FQE$的角平分線，故$\overline{PR}\perp\overline{QR}$。

(2) 因為

$$\angle DKM=\frac{1}{2}\angle DKC=\frac{1}{2}\left(\angle ADB+\angle DAC\right)，$$

$$\begin{aligned}\angle DGP&=\angle ADB-\angle APG=\angle ADB-\frac{1}{2}\angle APB=\angle ADB-\frac{1}{2}\left(\angle ACB-\angle DAC\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\angle ADB+\angle DAC\right)，\end{aligned}$$

所以$\angle DKM=\angle DGP$，得$KM\,//\,RP$，故由(1)即得$\overline{QR}\perp\overline{KM}$。

# 「五複合正四面體」之稜邊規格探究x2

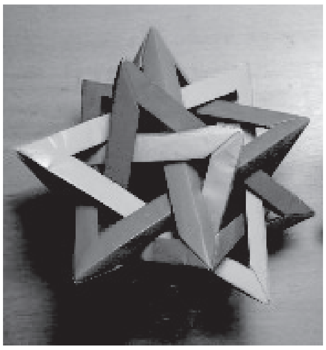
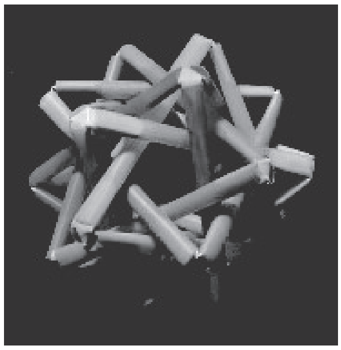
彭良禎／師大附中

## 一、前言》

關於五複合正四面體的組合摺紙，在 YouTube 影音平台的教學影片中，所見皆是將正方形色紙先 3 等分裁切**[註 1]**，然後摺出瘦長的稜邊零件，最後再陸續交錯穿插成五個鏤空的正四面體（圖一左圖）。在所有的步驟中，最令筆者好奇的是：能使五個正四面體彼此互相搭架的稜邊規格，是否真的就是「12：1」？

在上述的摺紙操作中，由於一開始即需耗費大半的心力摺製 30 片零件，且完成的作品通常會因紙材單薄而未顯堅挺，故坊間也常見將其結構改以吸管替代的組裝設計（圖一右圖）。不知讀者是否也跟筆者一樣好奇：吸管的口徑與長度該如何拿捏，才能使得五個正四面體搭架得剛剛好而不會晃動？

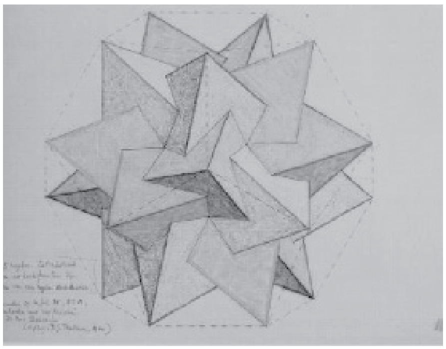
本文擬針對以上兩個提問，透過空間坐標的設定與推算，探究其組裝稜邊零件的規格數據。

圖一：兩款五複合正四面體稜邊搭架的作品。

## 二、頂點坐標》

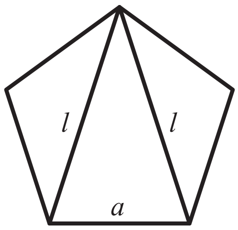
圖二是荷蘭版畫大師艾雪（M.C. Escher,1898-1972）彩繪五複合正四面體的設計稿。仔細觀察圖中以虛線連接頂點所構成的「正五邊形」，可發現複合體隱約外接了一個完整的正十二面體**[註 2]**。因此，若能在空間坐標系中，適當架設一個正十二面體的頂點坐標，便可依此推算其內接正四面體相互間的點、線、面數據。至於正十二面體的頂點位置，則需善用其內接正方體與「帳篷」的組成，以及下列引理的認知來輔助標定其坐標。



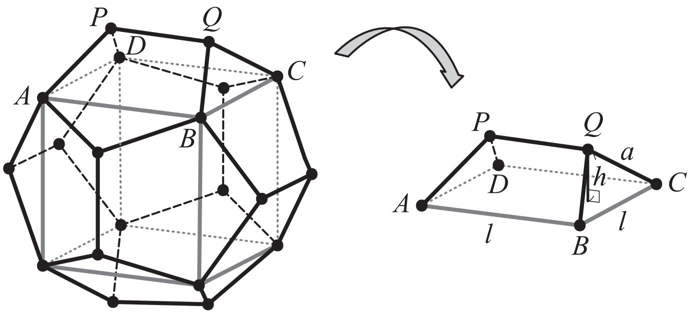
圖二：艾雪〈5 *Regular Tetrahedra*〉。

【引理 1】 如下圖，正五邊形的對角線 $l$ 與邊長 $a$ 成黃金比例：

$$\frac{l}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi\approx 1.6180339$$ 。**[註 3]**



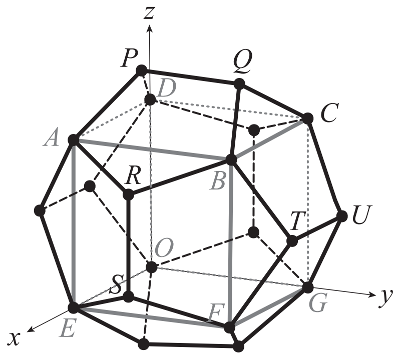

【引理 2】 若將正十二面體挖空一個內接正方體，則所餘「帳篷」$PQ\text{-}ABCD$ 的高度 $h$ 為正十二面體稜邊長 $a$（如圖三）的一半，即 $h=\frac{1}{2}a$ 。**[註 4]**




圖三：正十二面體內接的正方體與帳篷的分割。

因本文探討的目標是稜邊規格的比例，故以下為了簡化正十二面體頂點坐標的數據呈現，筆者特別取其邊長為 2，並沿著 $x$ 軸、$y$ 軸、$z$ 軸將其內接正方體置於第一卦限（如下圖）。此時正方體的邊長為 $2\varphi$，8 個頂點的坐標可分別定在原點 $O(0,0,0)$、$A(2\varphi,0,2\varphi)$、$B(2\varphi,2\varphi,2\varphi)$、$C(0,2\varphi,2\varphi)$、$D(0,0,2\varphi)$、$E(2\varphi,0,0)$、$F(2\varphi,2\varphi,0)$、$G(0,2\varphi,0)$，再根據正方體的中心坐標$(\varphi,\varphi,\varphi)$與引理 2 的結果，可標定正十二面體位在第一卦限帳篷上的 6 個頂點坐標如下：**[註 5]**

$$P(\varphi,\varphi-1,2\varphi+1)、R(2\varphi+1,\varphi,\varphi+1)、T(\varphi+1,2\varphi+1,\varphi)、$$
$$Q(\varphi,\varphi+1,2\varphi+1)、S(2\varphi+1,\varphi,\varphi-1)、U(\varphi-1,2\varphi+1,\varphi)。$$



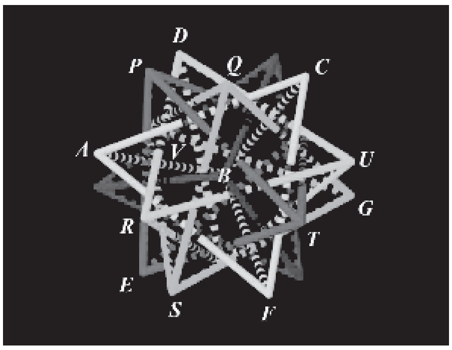

## 三、稜邊規格》

完成頂點的坐標架設之後，便可進一步觀察、推算以組合摺紙或吸管串接的稜邊數據。

### （一）摺紙比例

【觀察】紫色正四面體的稜邊 $\overline{PT}$ 架在黃色正四面體的稜邊 $\overline{AC}$ 上（如圖四）。

【目標】設 $\overline{AC}$ 的中點 $M$ 到 $\overline{PT}$ 的垂足為 $N$，則 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{MN}}$ 即為所求。**[註 6]**




圖四：標記稜邊色彩與頂點符號的五複合正四面體。

【計算】先由點 $A(2\varphi,0,2\varphi)$、點 $C(0,2\varphi,2\varphi)$ 取得中點 $M(\varphi,\varphi,2\varphi)$，

再由直線 $PT$ 的方向向量 $\overrightarrow{v}(1,\varphi+2,-\varphi-1)$ 與點 $P(\varphi,\varphi-1,2\varphi+1)$，

設 $\overline{PT}$ 上的點 $N(\varphi+t,\varphi-1+(\varphi+2)t,2\varphi+1-(\varphi+1)t)\cdots\cdots①$，

因為 $\overrightarrow{v}\perp\overline{MN}$，所以 $(1,\varphi+2,-\varphi-1)\cdot(t,-1+(\varphi+2)t,1-(\varphi+1)t)=0$，

算得 $t=\dfrac{2\varphi+3}{8\varphi+8}$，代入①式得垂足 $N\left(\dfrac{18\varphi+11}{8\varphi+8},\dfrac{17\varphi+8}{8\varphi+8},\dfrac{33\varphi+19}{8\varphi+8}\right)$，

進一步算得 $\left|\overline{MN}\right|=\left|\left(\dfrac{2\varphi+3}{8\varphi+8},\dfrac{\varphi}{8\varphi+8},\dfrac{\varphi+3}{8\varphi+8}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{4\sqrt{\varphi+1}}$，

故所求 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{MN}}=\dfrac{2\sqrt{2}\varphi}{\dfrac{\sqrt{6}}{4\sqrt{\varphi+1}}}=\dfrac{8\varphi\sqrt{\varphi+1}}{\sqrt{3}}=\dfrac{8\varphi^2}{\sqrt{3}}=\dfrac{8(\varphi+1)}{\sqrt{3}}=\dfrac{12\sqrt{3}+4\sqrt{15}}{3}\approx 12.092$。

【結論】由 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{MN}}$ 的比值可知，組合摺紙利用長：寬 = 3：1 的矩形摺取 12：1 的近似零件，顯示其稜邊長度只比準確值短少約 0.77%。若以常用規格 15 公分的色紙操作，則產生約 0.12 公分的誤差，還好紙材是軟的，且稜邊只有兩面，並非封閉的三角柱體，故此些微的誤差幾乎是隱而未現。

### （二）吸管比例

【觀察】兩歪斜稜邊紫色 $\overline{PT}$ 與黃色 $\overline{AC}$（如圖四）。**[註 7]**

【目標】(1) 設 $\overline{PT}$ 與 $\overline{AC}$ 間的距離為 $d$，則吸管的半徑 $r=\dfrac{d}{2}$。

(2) 設「正三角形框架」的吸管長為 $l$，則 $\dfrac{l}{2r}$ 即為所求。

【計算】(1) 利用歪斜稜邊 $\overline{AC}$、$\overline{PT}$ 的方向向量 $\overrightarrow{u}(1,-1,0)$、$\overrightarrow{v}(1,\varphi+2,-\varphi-1)$，

可算得通過直線 $AC$ 且與直線 $PT$ 平行的平面方程式為

$E$：$(\varphi+1)x+(\varphi+1)y+(\varphi+3)z=12\varphi+4$，

故得點 $P(\varphi,\varphi-1,2\varphi+1)$ 到平面 $E$ 的距離：

$$d(P,E)=\frac{\left|(\varphi+1)\varphi+(\varphi+1)(\varphi-1)+(\varphi+3)(2\varphi+1)-12\varphi-4\right|}{\sqrt{(\varphi+1)^2+(\varphi+1)^2+(\varphi+3)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{13\varphi+14}}$$

$$=2r\text{ 。}$$

(2) 利用右圖的結構比例可推得吸管長

$l = \overline{AC} - 2\sqrt{3}r = 2\sqrt{2}\varphi - 2\sqrt{3}r$ ，

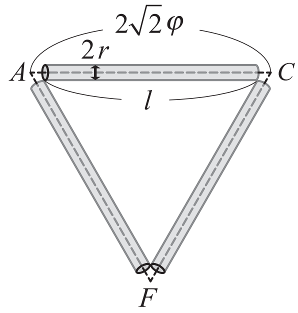
故所求 $\dfrac{l}{2r} = \dfrac{2\sqrt{2}\varphi - 2\sqrt{3}r}{2r} = \dfrac{\sqrt{2}\varphi}{r} - \sqrt{3}$

$= \sqrt{26\varphi + 28}\varphi - \sqrt{3}$

$= \sqrt{80\varphi + 54} - \sqrt{3}$

$= \sqrt{94 + 40\sqrt{5}} - \sqrt{3}$

$\approx 11.812$ 。

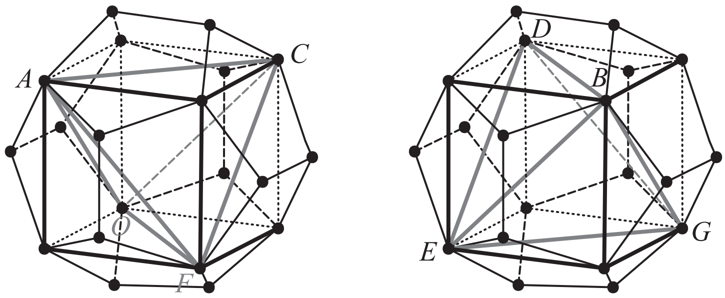



【結論】若取口徑 $2r = 0.6$ 公分的吸管組裝，則對應的長度 $l \approx 7.087$ ，基於剪裁吸管時，常有平整性的誤差現象，同時考量軟質塑膠吸管管壁壓縮時附帶的支撐彈力，建議可去其零頭以整數 7 公分來串接。附表呈現另兩種常用吸管的對應數值與建議長度供參（單位：公分）。

| 吸管口徑（ $2r$ ） | 吸管長度（ $l$ ） | 建議長度 |
|---|---|---|
| 0.7 | 7.087231161 | 7.0 |
| 0.8 | 9.449641544 | 9.4 |
| 1.2 | 14.17446232 | 14.1 |

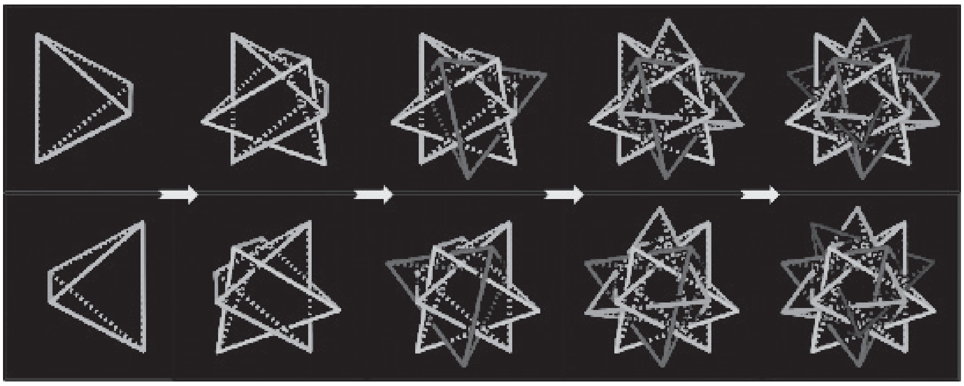
## 四、舉一反三》

仔細觀察圖五，眼尖的讀者或可發現正十二面體與其內接的正方體有共同的對稱面，但與其內接的正四面體卻無，故實際構成五複合正四面體的結構，其實還會產生兩種旋轉方向的結構差異（如圖六）。




圖五：正方體的 8 個頂點可內接兩個正四面體（左、右）。

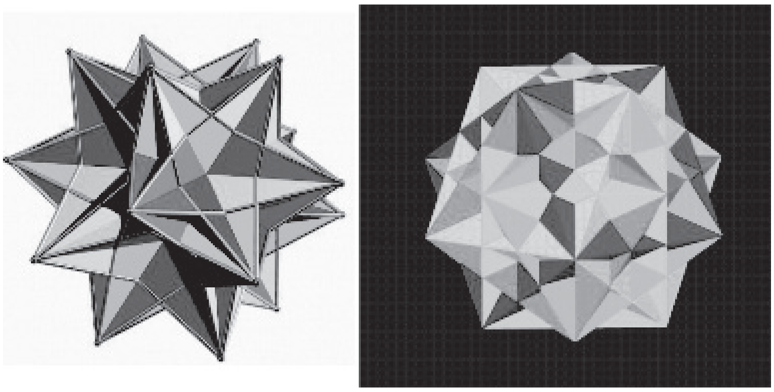
若以垂直於正十二面體某一個正五邊形中心的軸線為轉軸，然後將正方體內接的一個正四面體複製之後，再分別旋轉 $72°$ 、 $144°$ 、 $216°$ 、 $288°$ ，可得「左旋」的五複合結構（圖六上排）。若當初複製、旋轉的是正方體內接的另一個正四面體，則得「右旋」的五複合結構（圖六下排）。當兩個大小相同的左、右旋複合體並排陳列時，兩者之間便有機會形成面對稱的鏡像效果。**[註 8]**



圖六：兩種複製、旋轉五複合正四面體的變化歷程。

有了上述的認知經驗，讀者或可想像：若同時將兩個內接於正方體的正四面體一併複製和旋轉，則可產出複雜的「十複合正四面體」結構（圖七左圖）。又若當初複製和旋轉的不是正四面體，而是正方體，則可產出驚人的「五複合正方體」（圖七右圖）。**[註 9]**

透過本文的介紹、分析與推算，不知讀者是否已躍躍欲試，想試做幾顆模型放在手邊把玩、欣賞呢？下一篇文章將聚焦在五複合正四面體實作的經驗分享，敬請期待喲！



圖七：十複合正四面體（左）與五複合正方體（右）。

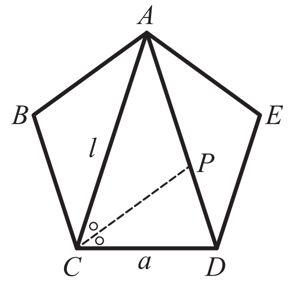
## 五、備註說明》

**[註 1]** YouTube 影音平台〈充滿藝術感的摺紙五重四面體〉的教學影片中，有較多組裝細節的解說過程，適合手邊無實體模型可供比對的初學者「依樣畫葫蘆」，參考網址：https://www.youtube.com/watch?v=9-ng-eVdsD0。

**[註 2]** 圖片出處：https://www.pinterest.com/pin/427701295834560982/。根據左下角鉛筆註記的文字資訊，可見艾雪對該立體的結構認知與研究資料：5 regular tetrahedra whose 20 vertices are those of a regular dodecahedron. (found in table IX, no.11, 'Vielecke und Vielfläche,' Dr. Max Brückner, Leipzig, B. G. Teubner, 1900.)。

**[註 3]** 正五邊形的對角線 $l$ 與邊長 $a$ 成黃金比例：$\dfrac{l}{a}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$。

【證明】




作 $\angle ACD$ 的角平分線交 $\overline{AD}$ 於 $P$ 點（如右圖），

則 $\overline{AP}=\overline{PC}=\overline{CD}=a$ 且 $\triangle ACD\sim\triangle CPD$，

故 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DP}}$，即 $\dfrac{l}{a}=\dfrac{a}{l-a}=\dfrac{1}{\frac{l}{a}-1}$，

進一步推算 $\left(\dfrac{l}{a}\right)^2-\dfrac{l}{a}=1$……①

得 $\dfrac{l}{a}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\varphi$（負不合）得證。

【補充】

(1) 若將 $\dfrac{l}{a}=\varphi$ 代入①式可得 $\varphi^2-\varphi=1$，筆者在後續推算相關數值時，經常會用二次式 $\varphi^2=\varphi+1$ 代換的降階手法來化簡整理過程。更多延伸應用可參閱維基百科「克卜勒三角」條目的介紹網址：
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BC%80%E6%99%AE%E5%8B%92%E4%B8%89%E8%A7%92。

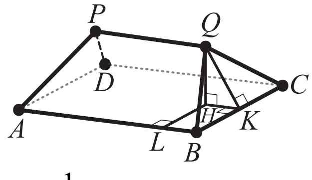
(2) 上圖中，因鈍角 $\triangle ABC$ 的 $\dfrac{底}{腰}=\varphi$ 且銳角 $\triangle ACD$ 的 $\dfrac{腰}{底}=\varphi$，故一般也參照「黃金矩形」的長寬比關係，將 36°-36°-108°與 72°-72°-36°這兩種等腰三角形通稱為「黃金三角形」。維基百科的介紹如下：
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%84%E9%87%91%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2。

**[註 4]** 為方便計算，不妨取 $a=2$，此時正方形 $ABCD$ 的邊長為 $2\varphi$。

【證明】

設 $Q$ 點在正方形 $ABCD$ 上的垂足為 $H$，在 $\overline{BC}$ 上的垂足為 $K$（如下圖），

則由三垂線定理知 $\triangle BQK$ 為直角三角形，




故 $\overline{QK}=\sqrt{\overline{QB}^2-\overline{BK}^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2\varphi}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\varphi^2}$，

算得 $h=\overline{QH}=\sqrt{\overline{QK}^2-\overline{HK}^2}=\sqrt{\left(4-\varphi^2\right)-\left(\varphi-1\right)^2}=\sqrt{3+2\varphi-2\varphi^2}=1=\dfrac{1}{2}a$ 得證。

【補充】

若帳篷不是直觀地以內接正方體切割正十二面體所得，而是反過來以正方體適當地外凸 6 個帳篷成正十二面體，則還需推論由該帳篷結構延伸而得的【引理 3】帳篷底面的正方形與側面的三角形、梯形分別形成的兩面角$\alpha$與$\beta$互餘。此時再加上正方體的兩面角為直角的事實，才可確認兩兩相鄰帳篷間的側面會因 180°的共平面現象而形成正五邊形，進而包覆成正十二面體。以下利用【引理 2】的結果證明如下：

設 $Q$ 點在 $\overline{AB}$ 上的垂足為 $L$，則 $\tan\alpha=\dfrac{\overline{QH}}{\overline{HK}}=\dfrac{1}{\varphi-1}$ ； $\tan\beta=\dfrac{\overline{QH}}{\overline{LH}}=\dfrac{1}{\varphi}$ ，

由 $\tan\alpha\times\tan\beta=\dfrac{1}{\varphi-1}\times\dfrac{1}{\varphi}=\dfrac{1}{\varphi^2-\varphi}=\dfrac{1}{(\varphi+1)-\varphi}=\dfrac{1}{1}=1$ 得證。

**[註 5]** 查閱維基百科「五複合正四面體」條目，其所附正十二面體的頂點坐標，是將內接正方體的邊長定為 2，中心放在原點 $O(0,0,0)$ ，且把 8 個頂點標定在 $(\pm1,\pm1,\pm1)$ 。此時正十二面體的邊長為 $\dfrac{2}{\varphi}$ ，故可根據【引理 2】的結果，以 $\left(\pm\left(1+\dfrac{1}{\varphi}\right),\pm\dfrac{1}{\varphi},0\right)$ 、$\left(0,\pm\left(1+\dfrac{1}{\varphi}\right),\pm\dfrac{1}{\varphi}\right)$ 、 $\left(\pm\dfrac{1}{\varphi},0,\pm\left(1+\dfrac{1}{\varphi}\right)\right)$ 標定其餘 12 個分別位在 $xy$ 平面、$yz$ 平面與 $xz$ 平面上的頂點坐標。又因為 $\left(1+\dfrac{1}{\varphi}\right)$ 之值可化簡成 $\dfrac{\varphi+1}{\varphi}=\dfrac{\varphi^2}{\varphi}=\varphi$ ，故最後標定成 $\left(\pm\varphi,\pm\dfrac{1}{\varphi},0\right)$ 、 $\left(0,\pm\varphi,\pm\dfrac{1}{\varphi}\right)$ 、 $\left(\pm\dfrac{1}{\varphi},0,\pm\varphi\right)$ ，網址如下：

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%94%E8%A4%87%E5%90%88%E6%AD%A3%E5%9B%9B%E9%9D%A2%E9%AB%94。

**[註 6]** 圖四截取自官長壽老師 GGB 網頁「3D 功能單元(4)」〈正四面體以固定軸旋轉(五個)〉之操作頁面，為配合觀察本文介紹的框架結構，筆者將該圖的數值滑桿「Fill」拉到 0.03，稜邊粗細（Line Thick）調到最大的 15，頂點大小（Point Size）配合稜邊調到 5，最後搭配圖二的旋轉方向再經「水平翻轉」而得。

【補充】

本題的觀測數值亦可改計算 $\overline{PT}$ 的中點到 $\overline{QS}$ 的距離。若手邊無實體模型，容易將本題的計算目標，誤以為是 $\overline{DR}$ 在 $\triangle ACF$ 上的交點 $V$ 到 $\overline{AC}$ 的距離，筆者算得該數據的比值 $d\left(V,\overline{AC}\right)=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{2}\varphi}{\sqrt{6}}}{2\varphi+2}=\dfrac{8\varphi+4}{\sqrt{3}}=\dfrac{8+4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\approx 9.783$ ，遠低於摺紙的 12，表示 $\overline{DR}$ 並未頂住稜邊 $\overline{AC}$ 。操作觀察網址：https://www.geogebra.org/m/WRAe0T1S#material/Rgh8fA5Z。

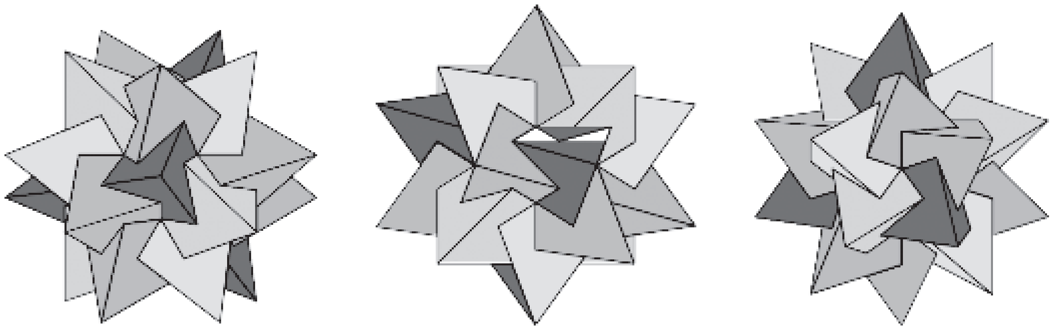
**[註 7]** 本題的觀測數值亦可改分析歪斜稜邊 $\overline{PT}$ 與 $\overline{QS}$ 的距離。

**[註 8]** 圖六的連續截圖出處同註 6，當數值滑桿「K」從 0 拉到 0.99、2、3.99、4，便陸續可見 2 至 5 個正四面體旋轉的複合歷程。網路資料未針對五複合正四面體的左、右旋給出明確的定義，此處暫先參照貝殼螺旋方向的描述。

[註 9] 十複合正四面體圖下載自維基百科：
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%81%E8%A4%87%E5%90%88%E6%AD%A3%E5%9B%9B%E9%9D%A2%E9%AB%94；
五複合正方體圖截取自官長壽老師 GGB 網頁〈正立方體以固定軸旋轉(五個)〉之操作頁面：https://www.geogebra.org/m/WRAe0T1S#material/GptUqa2e。

## 六、參考資料》

Thomas Hull，〈五複合正四面體〉，《數學摺紙計畫：30 個課程活動探索》，161-173 頁（台北：世茂出版，2018）。



# 求解一道三元等次方和聯立方程組

李維昌／宜蘭高中退休教師

## 一、研究目的》

本文將求解一道三元等次方和聯立方程組轉換成解一元三次方程式。請看下文的剖析。

## 二、研究過程》

已知三元 $a,b,c$ 為實數，滿足 $a\le b\le c$，且 $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^3+b^3+c^3=22 \\ a^6+b^6+c^6=262 \end{cases}$，試求 $(a,b,c)=$ ？

1. 尋求遞迴關係式：

(1) $(a+b+c)\left(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}\right)$

$=\left(a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}\right)+\left(a^{n+2}\cdot b+a^{n+2}\cdot c+b^{n+2}\cdot a+b^{n+2}\cdot c+c^{n+2}\cdot a+c^{n+2}\cdot b\right)\cdots\cdots①$

(2) $-(ab+bc+ca)\left(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}\right)$

$=-\left(a^{n+2}\cdot b+a^{n+2}\cdot c+b^{n+2}\cdot a+b^{n+2}\cdot c+c^{n+2}\cdot a+c^{n+2}\cdot b\right)-\left(a^{n+1}\cdot bc+b^{n+1}\cdot ac+c^{n+1}\cdot ab\right)\cdots\cdots②$

(3) $(abc)\left(a^{n}+b^{n}+c^{n}\right)=\left(a^{n+1}\cdot bc+b^{n+1}\cdot ac+c^{n+1}\cdot ab\right)\cdots\cdots③$

(4) 由①+②+③，可得

$(a+b+c)(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2})-(ab+bc+ca)\left(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}\right)+(abc)\left(a^{n}+b^{n}+c^{n}\right)$

$=a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}$，

亦即 $a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}$

$=\left(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2},a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1},a^{n}+b^{n}+c^{n}\right)\cdot(a+b+c,-ab-bc-ca,abc),n\ge 1,n\in\mathbb{N}$，

到此我們已經尋得遞迴關係式。

2. 設 $a+b+c=p,ab+bc+ca=q$,本題 $p=4$，

因為 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$，

所以 $a^2+b^2+c^2=(4)^2-2(q)=16-2q\cdots\cdots④$

3. 設 $abc=r$，

因為 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)-(ab+bc+ca)(a+b+c)+3abc$

$\Rightarrow 22=4(16-2q)-q(4)+3r$

$\Rightarrow 22=64-8q-4q+3r$

$\Rightarrow 3r=12q-42$，

所以 $r=4q-14\cdots\cdots⑤$

4. 利用遞迴關係式求出 $a^4+b^4+c^4=2q^2+32$ ：

利用遞迴關係式

$$a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}=\left(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2},a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1},a^n+b^n+c^n\right)\cdot(a+b+c,-ab-bc-ca,abc)$$

將 $n=1$ 時代入上式可得

$$a^4+b^4+c^4=\left(a^3+b^3+c^3,a^2+b^2+c^2,a+b+c\right)\cdot(a+b+c,-ab-bc-ca,abc)$$ ，

其中 $a^3+b^3+c^3=22,a^2+b^2+c^2=16-2q\cdots\cdots④,a+b+c=4$

$ab+bc+ca=q,abc=r=4q-14\cdots\cdots⑤$

因此

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4&=(22,16-2q,4)\cdot(4,-q,4q-14)\\&=88+2q^2-16q+16q-56\\&=2q^2+32\cdots\cdots⑥\end{aligned}$$

5. 利用遞迴關係式求出 $a^5+b^5+c^5=70q-96$ ：

利用遞迴關係式

$$a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}=\left(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2},a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1},a^n+b^n+c^n\right)\cdot(a+b+c,-ab-bc-ca,abc)$$

將 $n=2$ 時代入上式可得，

$$a^5+b^5+c^5=\left(a^4+b^4+c^4,a^3+b^3+c^3,a^2+b^2+c^2\right)\cdot(a+b+c,-ab-bc-ca,abc)$$

其中 $a^4+b^4+c^4=2q^2+32\cdots\cdots⑥,a^3+b^3+c^3=22,a^2+b^2+c^2=16-2q\cdots\cdots④$

$a+b+c=4,ab+bc+ca=q,abc=r=4q-14\cdots\cdots⑤$

因此

$$\begin{aligned}a^5+b^5+c^5&=\left(2q^2+32,22,16-2q\right)\cdot(4,-q,4q-14)\\&=8q^2+128-22q-8q^2+92q-224\\&=70q-96\cdots\cdots⑦\end{aligned}$$

6. 利用遞迴關係式求出

$q=3,r=-2$ 或 $q=\dfrac{-3+\sqrt{645}}{2},r=2\sqrt{645}-20$ 或 $q=\dfrac{-3-\sqrt{645}}{2},r=-2\sqrt{645}-20$ ：

利用遞迴關係式

$$a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}=\left(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2},a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1},a^n+b^n+c^n\right)\cdot(a+b+c,-ab-bc-ca,abc)$$

將 $n=3$ 時代入上式可得，

$$a^6+b^6+c^6=(a^5+b^5+c^5,a^4+b^4+c^4,a^3+b^3+c^3)\cdot(a+b+c,-ab-bc-ca,abc)$$

其中 $a^6+b^6+c^6=262,a^5+b^5+c^5=70q-96\cdots\cdots⑦,a^4+b^4+c^4=2q^2+32\cdots\cdots⑥$

$a^3+b^3+c^3=22,a+b+c=4,ab+bc+ca=q,abc=r=4q-14\cdots\cdots⑤$

因此

$$262=(70q-96,2q^2+32,22)\cdot(4,-q,4q-14)$$

$$\Rightarrow 262=280q-384-2q^3-32q+88q-308$$

$\Rightarrow 2q^3 - 336q + 954 = 0$

$\Rightarrow q^3 - 168q + 477 = 0$

$\Rightarrow q^3 - 3q^2 + 3q^2 - 9q - 159q + 477 = 0$

$\Rightarrow q^2(q-3) + 3q(q-3) - 159(q-3) = 0$

$\Rightarrow (q-3)\left(q^2 + 3q - 159\right) = 0$

$\Rightarrow q = 3$或$q = \dfrac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-159)}}{2(1)} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{645}}{2}$ ，

所以

(1) 當 $q = 3$時，$r = 4q - 14 = 4(3) - 14 = -2$ 。

(2) 當 $q = \dfrac{-3+\sqrt{645}}{2}$時，$r = 4q - 14 = 4\left(\dfrac{-3+\sqrt{645}}{2}\right) - 14 = 2\sqrt{645} - 20$ 。

(3) 當 $q = \dfrac{-3-\sqrt{645}}{2}$時，$r = 4q - 14 = 4\left(\dfrac{-3-\sqrt{645}}{2}\right) - 14 = -2\sqrt{645} - 20$ 。

7. 我們已經獲得

(1) $\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=-2 \end{cases}$ 或 (2) $\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ca=\dfrac{-3+\sqrt{645}}{2} \\ abc=2\sqrt{645}-20 \end{cases}$ 或 (3) $\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ca=\dfrac{-3-\sqrt{645}}{2} \\ abc=-2\sqrt{645}-20 \end{cases}$

**解方程組(1)：**

以$a,b,c$為三根，$x$的一元三次方程式為

$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0$

即

$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 4x - x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-2) - 2x(x-2) - (x-2) = 0$

$\Rightarrow (x-2)\left(x^2 - 2x - 1\right) = 0$ ，

我們獲得三實數根$x = 2$或$x = 1+\sqrt{2}$或$x = 1-\sqrt{2}$ ，

因此$\{a,b,c\} = \left\{2, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}$ ，

又$a \le b \le c$ ，

可得$a = 1-\sqrt{2}, b = 2, c = 1+\sqrt{2}$ ，

$(a,b,c) = \left(1-\sqrt{2}, 2, 1+\sqrt{2}\right)$即為所求。

**解方程組(2)：**

引述定理（可參考文獻[1]）

「實係數一元三次方程式$x^3 - px^2 + qx - r = 0$ ，判別式$\Delta = p^2q^2 + 18pqr - 4p^3r - 4q^3 - 27r^2$ ，

當$\Delta<0$時，解出一根為實數，兩根為共軛複數」

以$a,b,c$為三根，$x$的一元三次方程式為

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$ ，即$x^3-px^2+qx-r=0$ ，

$$\Delta=p^2q^2+18pqr-(4p^3r+4q^3+27r^2)$$

$$=\left[4^2\left(\frac{-3+\sqrt{645}}{2}\right)^2+18(4)\left(\frac{-3+\sqrt{645}}{2}\right)\left(2\sqrt{645}-20\right)\right]$$

$$-\left[4(4)^3\left(2\sqrt{645}-20\right)+4\left(\frac{-3+\sqrt{645}}{2}\right)^3+27\left(2\sqrt{645}-20\right)^2\right]$$

$$=\left[4\left(645+9-6\sqrt{645}\right)+72\left(645+30-13\sqrt{645}\right)\right]$$

$$-\left[\left(512\sqrt{645}-5120\right)+\left(\frac{645\sqrt{645}-5805+27\sqrt{645}-27}{2}\right)+108\left(745-20\sqrt{645}\right)\right]$$

$$=\left(51216-960\sqrt{645}\right)+\left(5120-512\sqrt{645}\right)+\left(2916-336\sqrt{645}\right)+\left(-80460+2160\sqrt{645}\right)$$

$$=-21208+352\sqrt{645}<-21208+352\sqrt{900}=-21208+10560=-10648<0，$$

解得$a,b,c$，一根為實數，兩根為共軛複數（與$a,b,c$三實數不合）。

**解方程組(3)：**

引述定理（可參考文獻[1]）

「實係數一元三次方程式$x^3-px^2+qx-r=0$ ，判別式

$\Delta=p^2q^2+18pqr-4p^3r-4q^3-27r^2$ ，當$\Delta<0$時，解出一根為實數，兩根為共軛複數」

以$a,b,c$為三根，$x$的一元三次方程式為$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$ ，

即$x^3-px^2+qx-r=0$ ，

$$\Delta=p^2q^2+18pqr-\left(4p^3r+4q^3+27r^2\right)$$

$$=\left[4^2\left(\frac{-3-\sqrt{645}}{2}\right)^2+18(4)\left(\frac{-3-\sqrt{645}}{2}\right)\left(-2\sqrt{645}-20\right)\right]$$

$$-\left[4(4)^3\left(-2\sqrt{645}-20\right)+4\left(\frac{-3-\sqrt{645}}{2}\right)^3+27\left(-2\sqrt{645}-20\right)^2\right]$$

$$=\left[4\left(645+9+6\sqrt{645}\right)+72\left(645+30+13\sqrt{645}\right)\right]$$

$$-\left[\left(-512\sqrt{645}-5120\right)+\left(-\frac{645\sqrt{645}+5805+27\sqrt{645}+27}{2}\right)+108\left(745+20\sqrt{645}\right)\right]$$

$$=\left(51216+960\sqrt{645}\right)+\left(5120+512\sqrt{645}\right)+\left(2916+336\sqrt{645}\right)+\left(-80460-2160\sqrt{645}\right)$$

$$=-21208-352\sqrt{645}<0，$$

解得$a,b,c$，一根為實數，兩根為共軛複數（與$a,b,c$三實數不合）。

8. 結語：

(1) 將 $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^3+b^3+c^3=22 \\ a^6+b^6+c^6=262 \end{cases}$ 轉換成 $\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ca=q \\ abc=r \end{cases}$。

(2) 利用文獻[2]的遞迴關係式

$a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}$

$=\left(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2},a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1},a^n+b^n+c^n\right)\cdot(a+b+c,-ab-bc-ca,abc)$，

$n\ge 1, n\in\mathbb{N}$，

求出 $q=3, r=-2$ 或 $q=\dfrac{-3+\sqrt{645}}{2}, r=2\sqrt{645}-20$ 或 $q=\dfrac{-3-\sqrt{645}}{2}, r=-2\sqrt{645}-20$。

(3) (i) 當 $a+b+c=4, ab+bc+ca=3, abc=-2$ 時，

造以 $a,b,c$ 為三根，$x$ 的一元三次方程式為 $x^3-4x^2+3x+2=0$，

解出三實數根為 $2, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$，

進而解得 $(a,b,c)=\left(1-\sqrt{2},2,1+\sqrt{2}\right)$。

(ii) 當 $a+b+c=p=4, ab+bc+ca=q=\dfrac{-3+\sqrt{645}}{2}, abc=r=2\sqrt{645}-20$ 時，

解得 $a,b,c$，一根為實數，兩根為共軛複數（與 $a,b,c$ 三實數不合）。

(iii)當 $a+b+c=p=4, ab+bc+ca=q=\dfrac{-3-\sqrt{645}}{2}, abc=r=-2\sqrt{645}-20$ 時，

解得 $a,b,c$，一根為實數，兩根為共軛複數（與 $a,b,c$ 三實數不合）。

9. 參考文獻：

[1] 許志農，一元三次方程式的判別式，算術講義，第 38 篇。

[2] 李維昌，利用遞迴關係式來求三元聯立方程組的等次方和，龍騰數亦優第 44 刊，第 32～36 頁，民國 111 年 4 月 20 日。

10. 參考資料：

維昌的靈光乍現

https：//www.weichangdelingguangzhaxian.com 或

https：//weichangdelingguangzhaxian.webnode.tw

# 一次近似！切線？！必也正名乎！

吳孝仁／政大附中

108 課綱實行至今似乎風風雨雨，但在第一次分科測驗落幕後，至少也提供了完整的三年經驗，可以從學生的學習情況來評估新舊課程變動的適切與否，當然某種程度也提供了未來修正精進的方向。以數學課程來說，除了部分教授內容在不同年段間的挪動以外，有些數學概念採取了螺旋式安排，這大概是現場老師比較不習慣的。我與夥伴們對這種安排方式有比較正面的態度：將以不變應萬變的數學概念重新拆解，藉由解構再重新建構再教授給學生。當然每位老師重新建構的方式不一樣，過程中也許能激發出討論的火花，互助的熱情，共好的精神。

話題回到這次分科測驗，有一道試題及解答引起我們關注，題目如下：

> 考慮坐標平面上之向量 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 滿足 $\left|\overrightarrow{a}\right|+\left|\overrightarrow{b}\right|=9$ 以及 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=7$ 。若令 $\left|\overrightarrow{a}\right|=x$ ，其中 $1<x<8$ ，且令 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $\theta$ ，則利用向量 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 所形成的三角形，可將 $\cos\theta$ 以 $x$ 表示成 $\dfrac{c}{9x-x^2}+d$ ，其中 $c$ 、 $d$ 為常數且 $c>0$ 。令此表示式為 $f(x)$ ，且其定義域為 $\{x\,|\,1<x<8\}$ 。試回答下列問題。

經過計算後， $f(x)=\dfrac{16}{9x-x^2}-1$ 。最後一小題則是：利用 $f(x)$ 的一次估計（一次近似），求當 $x=4.96$ 時， $f(4.96)$ 約為多少？由補習班聯合提供的解答如下：

> 因為 $9x-x^2=-(x-5)^2-(x-5)+20$ ，
>
> $$\begin{array}{rrr|l} -1 & 9 & 0 & \\ & -5 & 20 & 5 \\ \hline -1 & 4 & 20 & \\ & -5 & & \\ \hline -1 & -1 & & \end{array}$$
>
> 所以將 $x=4.96$ 代入 $9x-x^2$ 可近似為 $-1\times(-0.04)+20=20.04$ ，
>
> 故所求 $\approx\dfrac{16}{20.04}-1\approx-0.2016$ 。
>
> A： $-0.2016$

很清楚地，參考解答是將分式函數的分母 $9x-x^2$ 以在 $x=5$ 附近的一次近似 $20-(x-5)$ 取代，

我們試著推敲解答的想法如下：

$$9x-x^2=20-(x-5)-(x-5)^2\approx 20-(x-5)\ ，$$

所以

$$f(x)=\frac{16}{9x-x^2}-1\approx\frac{16}{20-(x-5)}-1\ ，$$

進而計算 $f(4.96)$ 的近似值。

但是我們知道，上式充其量是一個對於 $f(4.96)$ 的值的估計，命題的設計對於已學習過微分的學生而言，應該是預期以一次函數 $g(x)=f(5)+f'(5)(x-5)$ 的值 $g(4.96)$ 來回答較為合理。真正讓我們好奇的是，為什麼會有這種回答出現？！特別是誤解了一次近似的意義並誤用了近似符號($\approx$)，這樣的概念迷思在課程中為何產生？這是這篇文章想探討與分析的。我們認為，這應該回溯到高一內容，從條目 F-10-2 談起。

擷取數學課程手冊內容如下：

| | |
|---|---|
| F-10-2　三次函數的圖形特徵：二次、三次函數圖形的對稱性，兩者圖形的大域（global）特徵由最高次項決定，而局部（local）則近似一條直線。<br>備註：認識一般三次函數皆為 $y=ax^3+px$ 之平移；用 $(x-h)$ 的多項式，探討函數圖形在 $x=h$ 附近所近似的一條直線。 | f-V-2<br>a-V-1<br>g-V-5 |

這裡提及了二次、與三次多項式函數圖形的局部近似一條直線。但是整本課程手冊其實沒有「一次近似」這 4 個字。接著在條目範圍的第 2 點裡做了細部說明以及給了一個釋例(6)。

**[條目範圍第 2 點]**

本條目是藉由泰勒形式的表現方式讓學生能體會在 $x=h$ 附近（局部），圖形會有近似於一直線的特徵，以作為後續學習微分及切線概念的基礎，但此處不宜出現與微分相關的數學問題。

**[釋例(6)]**

(6) 已知 $f(x)=(x-2)^3+6(x-2)^2+3(x-2)+1$，透過 Excel 的計算，讓學生能透過觀察體會在 $x=2$ 附近，圖形會有近似於一直線的特徵。

| $x=2$ 附近 | 原函數 | 直線 | 誤差 |
|---|---|---|---|
| $x-2$ | $f(x)=(x-2)^3+6(x-2)^2+3(x-2)+1$ | $g(x)=3(x-2)+1$ | $\lvert f(x)-g(x)\rvert$ |
| −0.005 | 0.985149875 | 0.985 | 0.000149875 |
| −0.004 | 0.988095936 | 0.988 | 0.000095936 |
| −0.003 | 0.991053973 | 0.991 | 0.000053973 |
| −0.002 | 0.994023992 | 0.994 | 0.000023992 |
| −0.001 | 0.997005999 | 0.997 | 0.000005999 |
| 0.000 | 1 | 1 | 0.000000000 |
| 0.001 | 1.003006001 | 1.003 | 0.000006001 |
| 0.002 | 1.006024008 | 1.006 | 0.000024008 |

所以目前大部分版本的教材也是遵循這個脈絡，以一個三次函數為例，並以綜合除法化成泰勒多項式形式。也出現類似釋例(6)的數值表，而藉由數值的近似期望能感受當 $x \approx 2$ 時，

$$f(x) = \underbrace{(x-2)^3 + 6(x-2)^2}_{\text{數值太小忽略不記}} + 3(x-2) + 1 \approx 3(x-2) + 1 \text{，}$$

進而宣稱 $y = 3(x-2)+1$ 為 $f(x)$ 在 $x = 2$ 附近的一次近似。

在我們看來，這種由「值」的近似來理解一次近似的概念正是容易形成概念迷思且誤用近似符號($\approx$)的地方。例如，考慮函數 $f(x) = 1 + x + \sin x$ 在 $x = 0$ 附近的一次近似，觀察下面的數值表，顯見 $x \approx 0$ 時，如果忽略數值一樣小的 $\sin x$ ，則

$$f(x) = 1 + x + \sin x \approx 1 + x \text{ 。}$$

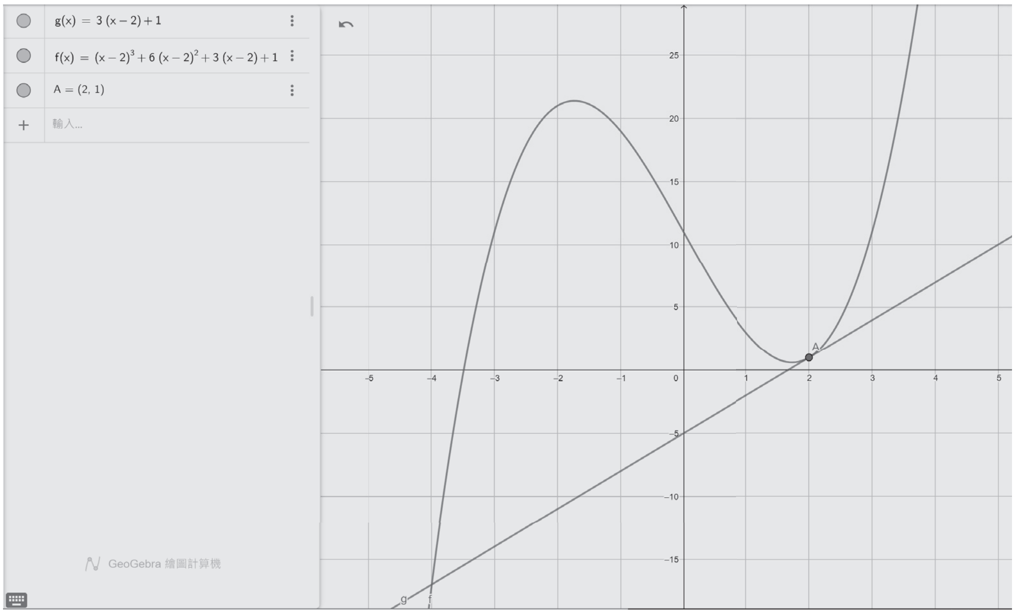
於是我們也宣稱 $g(x) = 1 + x$ 為 $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近的一次近似嗎？

| $x = 0$ 附近 | $f(x) = 1 + x + \sin x$ | 直線<br>$g(x) = 1 + x$ | 誤差<br>$\lvert f(x) - g(x) \rvert$ |
|---|---|---|---|
| –0.1 | 0.8001666 | 0.9000000 | 0.0998334 |
| –0.05 | 0.9000208 | 0.9500000 | 0.0499792 |
| –0.01 | 0.9800002 | 0.9900000 | 0.0099998 |
| –0.001 | 0.9980000 | 0.9990000 | 0.0010000 |
| 0 | 1.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000 |
| 0.001 | 1.0020000 | 1.0010000 | 0.0010000 |
| 0.01 | 1.0199998 | 1.0100000 | 0.0099998 |
| 0.05 | 1.0999792 | 1.0500000 | 0.0499792 |
| 0.1 | 1.1998334 | 1.1000000 | 0.0998334 |

新課綱在實行之初就懷抱著理想，希望學生能藉由科技工具（計算機）對數學概念進行有感的操作，並且以解決的問題為角度出發來學習。這點我們百分之一百認同！所以可以推想，這種由「值」的近似來理解一次近似的概念，是為了能夠搭配「數值型計算機」進行操作。但是我們認為，這樣反而被預設的工具所綁架，造成的迷思更是得不償失。

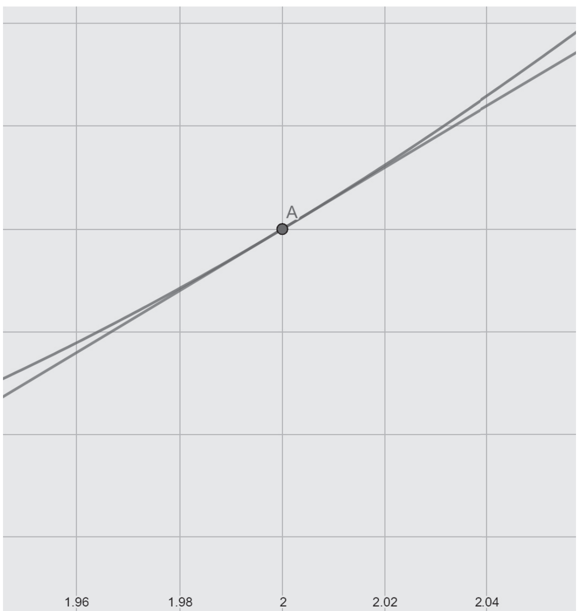
既然要使用科技工具就不要設限科技的框架，現在人手一隻手機載個學習工具 app 不是順便也讓學生學習去「使用手機」而不只是「玩手機」。或者處處可上網的環境，善用幾個工具網頁，不也潛移默化引導學子網路世界有無盡的學習資源供大家使用。

所以我們對於一次近似的教學脈絡看法如下：一樣以綜合除法化成泰勒多項式形式的 $f(x)=(x-2)^3+6(x-2)^2+3(x-2)+1$ 為例。保留一次項後的一次函數 $g(x)=3(x-2)+1$ ，我們應該「**先**」從圖形上來看待兩者的關係，並且，「**不要**」迴避 $y=g(x)$ 這條直線就是切線，兩者相切於 $A(2,1)$ ，下圖是藉由網頁版的繪圖計算機所呈現的結果。

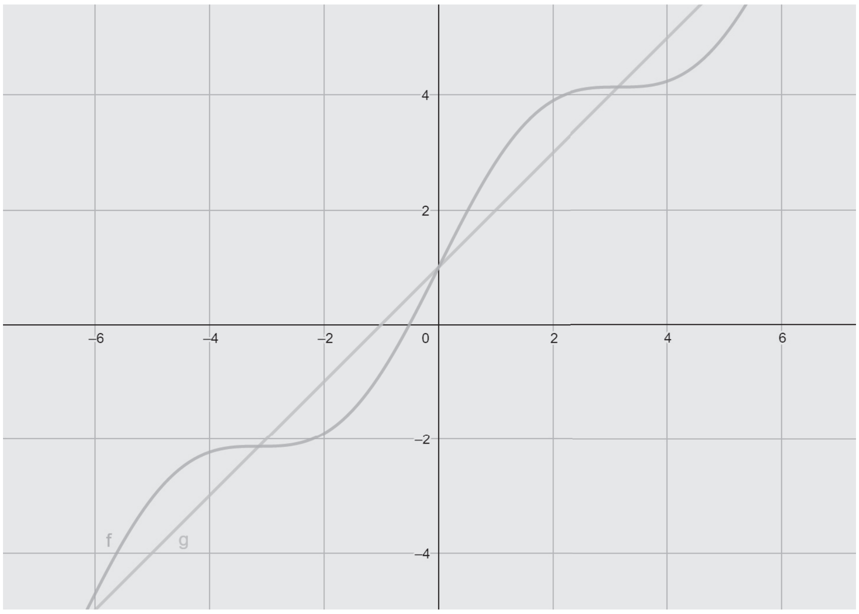



這裡以切線介紹一次近似 $g(x)$ ，自然是不涉及任何極限的概念，而是著重在相切的現象。我們也不用擔心學生會不會無法理解切線，原因是在國中階段，針對圓與直線相切的圖像學生已經有很完整的理解**[註 1]**。我們自己也在課堂上提問，請學生觀察圖形來回答直線 $y=g(x)$ 與 $f(x)$ 的函數圖形兩者有什麼關係？不意外的，都能說出切線、相切這幾個關鍵字。

當我們先賦予 $y=g(x)$ 與 $f(x)$ 的函數圖形相切的圖像，再將圖形放大，有圖有真相，自然能接受當 $x\approx 2$ 時， $f(x)\approx g(x)$ ，這不就是課綱條目裡念茲在茲的局部近似嗎？甚或要再以數值去操作 $f(x)\approx g(x)$ 也是錦上添花之措，多則有益，少亦無缺。如下圖：



必須強化 $y=g(x)$ 是切線，一次近似只是圖形附帶的說明。這就是本文的開門見山處。這樣子在名稱上做一點修正，$f(x)=1+x+\sin x$ 在 $x=0$ 附近的一次近似**不是** $g(x)=1+x$ 就不會因為數值的近似產生困擾。如下圖來看，在 $x=0$ 處，$g(x)=1+x$ 要說與 $f(x)=1+x+\sin x$ 相切，我想，可能「插」了一「點」！




所以傳統上安排在高三教材裡，先建立極限概念，才能計算函數圖形的切線的教學脈絡。在現今教材裡，則是在高一提早**看見**多項式函數的切線，換言之，操作綜合除法將多項式化成泰勒多項式形式更顯得有實際意義，不失為專屬於高一知識背景下的多項式函數求切線法。到了高三有了極限概念，再重新以新的工具處理切線問題，首尾呼應，更能幫助學子對前後所學形塑更完整的樣貌！

就讓一次近似以切線之名之形留存在學子的腦海裡，那麼下面這道段考試題，當掌握了三次函數圖形的對稱中心後，也能帶著微笑回答了！

| |
|---|
| 三次多項式 $f(x)$ 滿足：$f(3-x)+f(1+x)=2f(2)$，且當 $x\to\infty$，$f(x)\approx x^3$。若 $f(x)$ 在 $x=0$ 處的一次近似為 $y=9x+3$，試求 $f(x)$ 在 $x=4$ 處的一次近似。**[註 2]** |

行文至此差不多該做個總結。我們能理解編寫課本的過程中，在呈現數學概念時有諸多限制。但是，盡信書不如無書！概念的重新解構再建構，最終還是會藉由老師依照本職學能與自身的學習經驗傳遞給學子。又配合著科技的進步與時代的需要，在一週 4 堂的數學課裡，我們也許更該善用科技工具，擺脫舊經驗的束縛與教條式的限制，以更有效率的方式傳達數學概念的本質內涵。本文立論的基礎建立在實際課堂教學上的迴響與反思，誠摯與各方先進分享。祝福夥伴們教學很好，教育更好，臺灣共好！

**[註 1]** 函數圖形與切線除了相切於切點外，可能於他處有交點。這個與國中的舊經驗雖有差異但是不難理解。適當的提醒學生，我們只看局部範圍來談相切與否。

**[註 2]** $y=9x-29$。

# 專欄 動手玩數學


遊戲 181

☆

給定函數 $y=f(x)$ 及初始值 $x_1$，定義迭代數列 $\langle x_n \rangle$ 為

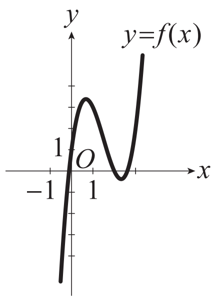
$x_n=f(x_{n-1})$，$n\geq 2$。

從迭代定義不難理解，迭代數列就是將所得到的函數值再當變數代入同一函數，得到的新函數值就是數列的下一項，重複這樣的步驟就會產生一個迭代數列。

現在就讓我們來研究三次多項式函數

$f(x)=\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{15}{2}x^2+\dfrac{47}{6}x+1$，

在初始值 $x_1=1$ 的情形下，所迭代出來的迭代數列 $\langle x_n \rangle$。




(1)求 $x_2$、$x_3$ 的值。

(2)試著寫下一般項 $x_n$ 的公式。

〔玩鎖·玩索〕

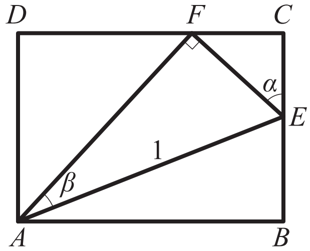
這個多項式是臺北市敦化國中的時丕勳同學找到的，那時候時同學已經取得我國參加國際奧林匹克數學競賽的國手資格。在南港中央研究院數學所的培訓時，時同學算出這個性質不錯的多項式。

將神秀大師的偈頌「身是菩提樹，心如明鏡台；時時勤拂拭，莫使惹塵埃」套用在數學學習上就是「動手算算，動腦想想，百益無害」。在這道多項式的問題上，除了有耐心的計算之外，別無他法，就算算看吧，將會有驚人的發現！

遊戲 182

☆☆☆

在矩形 $ABCD$ 內畫一個直角三角形 $AEF$，其中 $E$ 在 $BC$ 邊上，$F$ 在 $CD$ 邊上，且 $\overline{AE}=1$，如圖所示：




利用此圖形證明正弦與餘弦的和角公式，即證明

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

與

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \text{ 。}$$

試著設計一個幾何圖形，並利用此圖形證明正弦與餘弦的另兩個和角公式，即

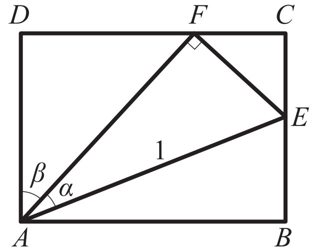
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

與

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \text{ 。}$$

〔玩鎖·玩索〕

這是和角公式的一個無字證明模型，只需將圖中每一個角度與每一條線段用 $\alpha$ 與 $\beta$ 來表示，即可看出和角公式。至於另兩個和角公式可以考慮使用下圖。



遊戲 183
☆☆☆☆

摩斯密碼（Morse Code）是一種相當古老的通訊方法，早在有線電話發明前的有線電報時代即已存在。由於它有精簡、低成本與高效率的優點，所以在通訊科技昌明的今天，它仍然占有相當重要的地位。摩斯密碼的組成相當簡單，它是由點“・”（短音）與線段“－”（長音）所組成的，例如數字 0,1,3,5，英文字母 Q 與運算符號+、×的摩斯電碼分別為

0－－－－－
1・－－－－
3・・・－－
5・・・・・
Q－－・－
+・－・－・
×－・・－・

每個摩斯密碼的長度定義為
（短音・的個數）＋3×（長音－的個數），例如 3（・・・－－）的長度為 3＋3・2＝9；Q（－－・－）的長度為 1＋3・3＝10；＋（・－・－・）的長度為 3＋2・3＝9。試問長度為 9 的摩斯密碼最多有多少種？

〔玩鎖‧玩索〕

95 年大學學科能力測驗國文考科，在語文修正的部分，出現「火星文」的爭議題。有一道題目出現「3Q」的文字，它是網路慣用的稱呼，是英文「Thank you」，中文「謝謝」的意思。事實上，火星文沒什麼了不起，早在一百多年前，山姆 • 摩斯就有他自己的「火星文」，只是我們稱它為摩斯密碼而已。「3Q」的摩斯密碼為

・・・－－　　－－・－

；而

・－－－－
・－・－・
・・・－－
－・・－
・・・・・

代表

1+3×5 。

摩斯密碼是世界上最重要的密碼技術之一，1838 年美國發明者山姆 • 摩斯建立了這一套摩斯密碼的系統。它是在電話尚未被發明之前，用於長距離的電報電訊技術，而中國所通用的電報機器點畫記號和摩斯密碼相通，只是每一個國字用四個阿拉伯數字代表，例如「聖」的數字代碼為 5110，所以「聖」的摩斯密碼為

・・・・・　　・－－－－
・－－－－　　－－－－－

每個摩斯密碼都是短音與長音的直線排列，或點與線段的直線排列，可用有相同物的排列公式來計算。

遊戲 184

☆☆☆

將由左至右的六個位置分別填入 0 或 1 或 2 的數字，成為「三元字串」，例如：201021 是一個三元字串。對於兩個三元字串 $a = a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ 與 $b = b_1b_2b_3b_4b_5b_6$，定義 $a$ 與 $b$ 的距離為滿足 $a_i \neq b_i$ 的下標 $i$ 的個數。例如：201021 與 001011 的距離為 2（因為它們的第一及第五個位置的數字不相同）。

(1) 試問與 201021 的距離為 3 的三元字串共有多少個？

(2) 試求所有三元字串與 201021 的距離總和。

〔玩鎖‧玩索〕

本問題出自 100 年度師大數學系推甄試題。

# 動手玩數學~破解祕笈 第45期

**遊戲 177**

利用倒推回去的思考方式，得

| | 甲 | 乙 | 丙 |
|---|---|---|---|
| 第三次分配後 | 8 | 8 | 8 |
| 第二次分配後 | 4 | 4 | 16 |
| 第一次分配後 | 2 | 14 | 8 |
| 開始時 | 13 | 7 | 4 |

所以甲原有 13 枚硬幣，乙原有 7 枚硬幣，丙原有 4 枚硬幣。

〔玩鎖・玩索參考解答〕

賭博前，甲、乙、丙手中各有 39, 21, 12 萬元。

**遊戲 178**

經過 $a_1 = 40$ 年後，還可以再活

$a_2 = a_1 \times \frac{1}{5} = 40 \times \frac{1}{5}$，再經過 $a_2$ 年後，

還可以再活 $a_3 = a_2 \times \frac{1}{5} = 40 \times \frac{1}{5^2}$ ，⋯，

依此下去，總共可以活

$$S = a_1 + a_2 + \cdots = 40\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$$

年。利用無窮等比級數的求和公式，得

$$S = 40 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = 50 ,$$

故此人可以延長壽命 10 年。

〔玩鎖・玩索解答〕

a. 式子左邊是首項為 1 公比為 $x$ 的等比級數，因此當 $1 - x \neq 0$ 時，等式成立。即 $x \neq 1$ 時，等式成立。

b. 式子左邊是無窮等比級數，因此當 $|x| < 1$ 時，等式成立。

c. 同 b.的結果，當 $|z| < 1$ 時，等式成立。

**遊戲 179**

假設歐基里德造的整係數多項式為 $f(x)$ 及那時的年紀為 $a$ 歲，並設旁邊的人所代入較大的數為 $L$ 。根據題意我們有

$$\begin{cases} f(7)=77 \\ f(L)=85 \\ f(a)=0 \\ 7<L<a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-7)\,|\,-77\,(=0-77) \\ (L-7)\,|\,8\,(=85-77) \\ (a-L)\,|\,-85\,(=0-85) \\ 7<L<a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8,14,18,84 \\ L=8,9,11,15 \\ (a-L)\,|\,85 \\ 7<L<a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=14， \\ L=9。 \end{cases}$$

因此當時歐基里德的年紀為 14 歲，所以他出生於西元前 350 年。

**遊戲 180**

透過如下的操作：

| 操作程序 | $\cos A$ | $\cos B$ |
|---|---|---|
| 平方 | $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{8}$ | $\dfrac{3\sqrt{5}-5}{40}$ |
| 乘以 40 | $15\sqrt{2}-20$ | $3\sqrt{5}-5$ |
| 加 20 | $15\sqrt{2}$ | $3\sqrt{5}+15$ |
| 再平方 | $450$ | $270+90\sqrt{5}$ |
| 除以 90 | $5$ | $3+\sqrt{5}$ |
| 減 3 | $2$ | $\sqrt{5}$ |

因為 $2<\sqrt{5}$ ，所以 $\cos A<\cos B$ 。又餘弦函數在銳角範圍是遞減函數，所以 $A>B$ 。